

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
ҚР БҒМ ҒК Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты

ӘОЖ 531-1:669.018.44:004.942

Қолжазба құқығында

АСҚАРОВА АСЕЛ

**Ыстыққа төзімді қорытпалардан жасалған стержендегі бейсызықты
термомеханикалық процесстерді компьютерлі-математикалық модельдеу**

6D070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ.д., проф.,
Кудайкулов Анарбай
(Ақпараттық және есептеуіш
технологиялар институты,
Алматы, Қазақстан)

Шетелдік ғылыми кеңесші:
PhD, Professor,
Hamdani Saidi
(Universiti Teknologi Malaysia (UTM), Kuala Lumpur, Malaysia)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2020

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР.....	4
БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР.....	5
КІРІСПЕ.....	6
1 СТЕРЖЕНДЕРДІ ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУ ЖӘНЕ СПЛАЙН ФУНКЦИЯЛАРДЫ ҚҰРУ АЛГОРИТМДЕРІ.....	12
1.1 Локалдық жылу көздерін есепке ала отыра стерженді дискретизациялау алгоритмі.....	12
1.2 Дискрет элемент ұзындығы бойынша екінші дәрежелі сплайн функция құру және олардың қасиеттері.....	14
1.3 Стерженде жылу таралу заңын табудағы тестілік есепті энергетикалық әдіспен шығару.....	16
1.4 Стерженнің термо-механикалық күйін зерттеу алгоритмі.....	21
2 ӘРТҮРЛІ ЖЫЛУ КӨЗДЕРІ ӘСЕРІНДЕГІ СТЕРЖЕНДЕ ПАЙДА БОЛАТЫН ТЕРМО-МЕХАНИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ АЛГОРИТМІ.....	28
2.1 Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал құру алгоритмі.....	28
2.2 Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің термо-механикалық күйін зерттеу алгоритмі.....	33
2.3 Компьютерлік бағдарламалар, интерфейстер.....	42
3 КӨЛДЕНЕҢ ҚИМА СТЕРЖЕНІНІҢ ҚАЛЫПТАСҚАН ТЕРМО- МЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ.....	45
3.1 Локалдық жылу ағыны, жылу изоляциясы мен жылу алмасу кезіндегі айнымалы қима стерженінде температураның таралу аймағын модельдеудің энергетикалық әдісі.....	45
3.2 Көлденең қима ауданы өзгеруші стерженнің термо-механикалық күйін математикалық модельдеу.....	50
3.3 Соңғы жылу ағындарының мәніне байланысты стерженнің	

термомеханикалық күйінің өзгеруіне арналған есептеу тәжірибелері..	56
ҚОРЫТЫНДЫ.....	71
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	73

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011 Қазақстан Республикасының Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелер.

Автореферат және диссертацияны безендіру бойынша нұсқаулық, ҚР БҒМ, Жоғары аттестаттау комитеті. – Алматы, 2004.

МС 7.1-2003 Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

Индекс	Параметрдің атауы	Өлшем бірлігі
L	стерженнің шекті ұзындығы	$[см]$
F	стерженнің көлденең қима ауданы	$[см^2]$
α	стержень материалының жылудан кеңею коэффициенті	$\left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$
K_{xx}	стержень материалының жылу өткізгіштік коэффициенті	$\left[\frac{W}{см \cdot ^{\circ}C} \right]$
E	стержень материалының серпімділік модулі	$\left[\frac{кГ}{см^2} \right]$
q	жылу ағыны	$\left[\frac{W}{см^2} \right]$
h	жылу алмасу коэффициенті	$\left[\frac{W}{см^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$
T_{co}	қоршаған орта коэффициенті	$[^{\circ}C]$
T_i, T_j, T_k	түйін нүктелердегі температура	$[^{\circ}C]$
R	стерженнің осі бойынша бағытталған сығушы күш	$[кГ]$
σ	термо-серпімді кернеу	$\left[\frac{кГ}{см^2} \right]$
$\sigma_T(x)$	температуралық кернеу	$\left[\frac{кГ}{см^2} \right]$
$\sigma_x(x)$	серпімділік кернеуі	$\left[\frac{кГ}{см^2} \right]$
ε	термо-серпімді деформация	[өлшеусіз]
$\varepsilon_T(x)$	температуралық деформация	[өлшеусіз]
$\varepsilon_x(x)$	серпімділік деформациясы	[өлшеусіз]

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Ішкі жылу қозғалтқыштары, реактивтік қозғалтқыштар, жылу энергия станциялары, атом энергия станциялары, қорғасын - мырыш өңдеу, уран өңдеу, мұнай өңдеу, тағы да басқа өңдеу зауыттарының құрылым элементтері әртүрлі жылу көздері әсерімен жұмыс жасайды. Ол қозғалтқыштармен өңдеу зауыттарының сенімді жұмыс жасауы стержень тектес құрылым элементтерінің термкернеулік-деформациялық күйлеріне тәуелді болады. Сондықтан да шекті ұзындықтағы жылуға төзімді қоспалардан жасалған стержендердің әртүрлі жылу көздері әсерінде туындайтын термо-механикалық күйлерін зерттеу және сол күйлерді компьютерлі- математикалық модельдеу заманауи қозғалтқыштар жасауда өзекті мәселелер болып табылады.

Стержендегі термомеханикалық процесстерді зерттеудің негізін 20 ғасыр зерттеушілері Л. Сегерлинг, М.Б. Зинкеевич, С.П. Тимашенко сияқты әйгілі ғалымдардың классикалық жұмыстарынан бастау алынды. Қазіргі заман зерттеушілернің ішінен He Yang – The University of Sheffield (Ұлыбритания), Keyan Li – Dalian University of Technology (Қытай), N.Bontcheva – Механика институты, Болгария, Ресей елінің зерттеушілері П.Н. Разжилов МГУ, Е.М. Смирнов Санк-Петербургтық политехникалық университеті, А.С. Шпагин ГНЦРФ жұмыстарында бірқатар жаңашылдық пен ерекшеліктердің негіздері көрінді. Қазіргі уақытта осы тақырыпты кеңінен зерттеп жүрген бірқатар отандық ғалымдар бар. Олар: А.Қ. Құдайқұлов, А.А. Ташев, А.Н.Төреходжаев, Е.Аринов және т.б..

[1] - жұмыста байланыс элементтерін қосқанда қатты денелердің толық байланыстырылған термо-серпімді-пластикалық реакциясын талдау үшін ақырғы элемент процедурасы ұсынылған. Бұл жұмыста қатты және жанасу жағдайлары үшін үздіксіз механиканың тұжырымдамасы жинақталған және есепті шешудің тиімді элементтерінің әдістері келтірілген. Шектеу функциясы әдісі жанасу бетінің Гаусс нүктелерінде байланыс жағдайларын қою үшін қолданылады. Шектеулі элементтерді талдауда кеңінен қолданылатын басқа процедуралар осы жұмыста келтірілген шектеулер функциясы әдісінің ерекше жағдайлары ретінде қарастырылуы мүмкін. Шешім қабылдау процедурасы перспективалы болып табылады және математикалық модельдеу мен шешудің дәлдігіне қатысты қосымша зерттеулер қажет. [2] -де масса, импульс және энергияның сақталу заңдарын қамтитын термоэластиканың негізгі теңдеулері келтірілген. Бұл жұмыста кинематикалық теңдеулер, сондай-ақ теңдеулер жүйесін жабатын сәйкес қатынастар келтірілген. Ол сонымен қатар термодинамиканың екінші заңын білдіретін энтропияның теңсіздігі ретінде конституциялық қатынастарға физикалық шектеулерді ұсынады. Бұл шектеулер математикалық түрде сипатталған. Жылу физикасының сызықтық емес есептерінің біреуінің сандық шешімі [3] берілген. Бұл жұмыста қарастырылып отырған мәселені шешудің бар екендігі және бірегейлігі туралы

дәлел келтірілген. Сондай-ақ, жұмыста алынған барлық нәтижелерді пайдалануға мүмкіндік беретін сәйкес итерациялық схема қолданылады. Бұл жұмыста шешілетін мәселенің нақты шешіміне жақындайтын дәйекті шешімдер әдісі де қолданылады. [4] сілтемеде ауаның үлкен салқындатылатын турбиналық генераторларындағы статор орамдарының кейбірінде туындаған проблемалардың мысалдары келтірілген, соның ішінде катушкалар дірілі салдарынан VPI кәдімгі және жаһандық статорлардың деградациясы мен окшаулауының бұзылуы. Термоэластикаға қатысты негізгі теориялық сұрақтар [5-10] берілген. [11] жылы жергілікті температуралардың, жылу ағындарының, жылу берудің және жылу окшаулаудың бір уақытта әсер етуі кезінде жұмыс істейтін жүк көтеретін құрылымдық элементтердің стационарлық жылу кернеулерін модельдеу әдісі мен бағдарламалық жасақтама жасалды. Сондай-ақ, термиялық кеңею коэффициентінің температураға толық тәуелділігі ескеріледі.

Мыс балқыту, алюминий және металлургия зауыттарының технологиялық желілерінде негізгі құрылымдардың көтергіш стержендері күрделі жылу өрісінде жұмыс істейді. Ядролық реакторлардың, жылу электр станцияларының, ірі газды электр станцияларының, іштен жанатын қозғалтқыштардың, реактивті қозғалтқыштардың және мұнай жылыту қондырғылары мен зауыттардың жүктеме элементтері стерженді элементтер болып табылады. Бұл стержендер жоғары температура мен ыстыққа төзімді қорытпалардан жасалған. Жоғарыда аталған жабдықтардың сенімді жұмыс істеуі үшін стержень элементтерінің жылу беріктігін қамтамасыз ету қажет. Мұндай стержендердің термомеханикалық күйін зерттеу үшін арнайы модельдер, әдістер, қолданбалы бағдарламалар жасалуы қажет. Шекті ұзындықтағы жылуға төзімді қоспалардан жасалған стержендердің әртүрлі жылу көздері әсерінде туындайтын термо-механикалық күйлерін зерттеу және сол күйлерді компьютерлі-математикалық модельдеу заманауи қозғалтқыштар жасауда өзекті мәселелер болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты. Бұл диссертациялық жұмыстың мақсаты энергияның сақталу заңы негізінде шекті ұзындықтағы стержендерде әртүрлі жылу көздері әсерінен туындайтын сызықты емес термо-механикалық процестердің компьютерлік-математикалық модельдерін құру. Мұнда жылу көздері деп локалдық температуралар, жылу ағындары, жылу алмасулар және жылу изоляциялары айтылады. Сондай-ақ әртүрлі қоспалардан жасалған стержень материалдарының жылудан кеңею коэффициенттерінің температураға тәуелділігі де есепке алынады.

Зерттеудің міндеттері: Белгіленген мақсатқа қол жеткізу үшін төмендегі міндеттерді шешу қажет:

- Локалдық сплайн функцияларды құру, қасиеттерін зерттеу;
- Әртүрлі қоспалардан жасалған стержень материалдарының жылудан кеңею коэффициенттерінің температураға тәуелділігін модельдеу;

- Локалдық температура, жылу изоляциясы және жылу алмасу әсеріндегі шекті ұзындықтағы стержень үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалды құру, оның интегралданған көрінісін табу, табиғи шекті шарттарды қанағаттандыратын шешуші теңдеулерді құру;

- Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу, жылу изоляциясы әсеріндегі шекті ұзындықтағы стержень үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалды құру, оның интегралданған күйін табу, табиғи шекті шарттарды қанағаттандыратын шешуші теңдеулерді алу;

- Өртүрлі локалдық жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стерженнің ұзару мөлшерін анықтау алгоритмін құру;

- Өртүрлі жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стерженнің екі шеті мықтап бекітілген жағдайда онда пайда болатын остік сығушы күш мөлшерін табу алгоритмін жасау;

- Өртүрлі жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығын табу алгоритмін құру;

- Өртүрлі жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стержендердің ұзындықтары бойынша орын ауыстыру, температуралық, термо-серпімді және серпімді деформациялар мен кернеулердің таралу заңдылықтарын анықтау алгоритмдерін құру;

- Барлық құрылған математикалық модельдер мен алгоритмдерді компьютерге енгізудің Python бағдарламалық кешендерін құру;

Зерттеу нысаны. Өртүрлі локалдық жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стержень.

Зерттеу пәні. Термо-механика, термо-серпімділік, энергияның сақталу заңы, Python бағдарламалық тілі.

Зерттеу әдісі. Квадраттық сплайн функциялар және олардың қасиеттері, энергияның сақталу заңы, табиғи шекті шарттарды қанағаттандыратын шешуші теңдеулерді құру, стерженнің ұзаруымен, остік сығушы күшті табу, температураның, температуралық, термо-серпімділік, серпімділік деформациялары және кернеулердің таралу заңдылықтарын анықтау. Температура өрісі әсеріндегі стержень үшін серпімділік деформациясының потенциал энергиясын құрып, орын ауыстыру заңдылығын табу.

Зерттелетін шекті ұзындықтағы стержень берілген локалдық жылу көздерін есепке ала отыра дискреттеледі. Әрбір дискрет элемент ұзындығы бойынша температураның таралуын аппроксимациялайтын локалдық квадраттық сплайн функция құрылады. Әр элемент үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал құрылады. Оның интегралданған күйі табылады. Стержень ұзындығы бойынша функционалдардың қосындысы зерттелетін стерженнің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал болып табылады. Құрылған функционал түйін нүктелерді белгісіз температуралар бойынша минимизацияланып шешуші теңдеулер жүйесі құрылады. Мұнда барлық табиғи шекті шарттар толық есепке алынған болады. Ол жүйенің шешімі түйін нүктелердегі температуралардың мәндері анықталады. Оның нәтижесінде

стержень ұзындығы бойынша температураның таралу заңдылығы табылады. Жылу физикасының негізгі заңына сәйкес жылу көздері әсерінен стерженнің ұзару мөлшері анықталады. Деформация сәйкестігінің негізгі шартын пайдаланып екі шеті бекітілген стерженде пайда болатын сығушы остік күштің мөлшері анықталады. Ары қарай термо-серпімділік теориясының негізінде стержень ұзындығы бойынша температуралық, термо-серпімділік, серпімділік деформацияларымен кернеулердің таралу заңдылықтары анықталады. Орын ауыстыру заңдылығын табу үшін әрбір дискрет элементке тән жылу өрісі мен ішкі серпімді деформацияның потенциал энергиясын өрнектейтін функционал құрылады. Құрылған функционалдың интегралданған күйі табылады. Оны түйін нүктелердің орын ауыстырулары бойынша минимизациялап негізгі шешуші теңдеулер жүйесі құрылады. Мұнда стерженнің екі шеті бекітілгені есепке алынады. Жүйені шешу нәтижесінде орын ауыстыру таралу заңдылығы табылады. Жоғарыда айтылған алгоритмдер мен модельдер компьютерге Python программа күйінде енгізілген. Сол бағдарлама кешені көмегімен жоғарыда айтылғандардың барлығы үлкен дәлдікпен анықталған.

Жұмыстың ғылыми жаңалығы:

- Қоспадан жасалған, әртүрлі жылу көздері әсеріндегі шекті ұзындықтағы стерженді дискретизациялау алгоритмі құрылды;
- Жергілікті координата жүйесінде бір дискрет элемент ұзындығы бойынша жылу таралуын өрнектейтін квадраттық сплайн функциялар құрылып, олардың қасиеттері анықталды;
- Әртүрлі жылу көздері әсеріндегі қоспадан жасалған шекті ұзындықтағы стержендердің толық жылу энергиясын өрнектейтін функциялар құру алгоритмдері жасалды;
- Әртүрлі жылу көздері әсеріндегі стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығын табу үшін негізгі шешуші теңдеулер жүйесін құру алгоритмі жасалды;
- Бір шеті бекітілген стерженнің әртүрлі жылу көздері әсерінен ұзару мөлшерін табу алгоритмі құрылды;
- Екі шеті бекітілген стерженде әртүрлі жылу көздері әсерінен пайда болатын остік сығушы күш мөлшерін анықтау алгоритмі жасалды;
- Екі шеті бекітілген стерженнің ұзындығы бойынша температуралық, термо-серпімділік, серпімділік деформацияларымен кернеу өрістерін анықтау әдістері жасалды;
- Әртүрлі жылу көздері әсерінен стерженде туындайтын орын ауыстыру заңдылығын анықтау алгоритмі құрылды;
- Әртүрлі жылу көздері әсерінен қоспадан жасалған стерженнің термо-механикалық күйін өрнектейтін компьютерлік-математикалық модель құрылды;
- Құрылған алгоритмдер мен модельдер компьютерге Python бағдарламалары күйінде енгізілді.

Жұмыстың теориялық және практикалық маңызы. Зерттеу жұмысының теориялық маңызы қоспадан жасалған шекті ұзындықтағы стерженнің әртүрлі жылу көздері әсерінен термо-механикалық күйін зерттеуде фундаменталдық энергияның сақталу заңының қолданылуына негізделген алгоритмдер, модельдер болып табылады. Диссертациялық зерттеудің практикалық маңызы фундаменталдық энергияның сақталу заңын қолданбалы өзекті және күрделі инженерлік мәселелерді шешуде қолданылуында; құрылған алгоритмдер мен модельдер, Python бағдарламалары көптеген өзекті қолданбалы мәселелерді үлкен дәлдікпен шешуге мүмкіндік береді.

Қорғауға шығарылған негізгі тұжырым. Фундаменталдық энергияның сақталу заңы негізінде қоспадан жасалған шекті ұзындықтағы стерженнің әртүрлі локалдық жылу көздері әсерінен термо-механикалық күйін зерттеудің компьютерлік-математикалық моделі құрылды. Қоспадан жасалған шекті ұзындықтағы стерженнің ұзындығы бойынша әртүрлі локалдық жылу көздері әсерінен пайда болатын температураның, температуралық, термо-серпімділік, серпімділік деформацияларымен кернеулердің және орын ауыстырудың таралу заңдылықтарын анықтайтын алгоритмдер мен модельдер құрылған. Бір шеті бекітілген шекті ұзындықтағы қоспадан тұратын стерженнің әртүрлі локалдық жылу көздері әсерінен ұзару мөлшерін анықтау алгоритмі құрылған. Екі шеті бекітілген, қоспадан жасалған шекті ұзындықтағы стерженде әртүрлі локалдық жылу көздері әсерінен пайда болатын остік сығушы күш мөлшерін анықтау алгоритмі анықталған. Жасалған барлық алгоритмдер мен модельдер Python бағдарлама тілінде компьютерге енгізілген.

Сенімділік дәрежесі мен апробациялау нәтижелері. Алынған сандық нәтижелер энергияның сақталу заңдылықтарын қанағаттандырғандықтан олардың дәлдігі өте жоғары. Сондықтан да алынған тұжырымдардың сенімділік дәрежелері де талапқа сай. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері Ғылым комитетінің «Ақпараттық және есептеуіш технологиялар» институтының «Есептеу әдістері және бағдарламамен қамтамасыз ету», ҚР БЖҒМ әл-Фараби атындағы ұлттық университетінің «Математикалық және компьютерлік модельдеу» кафедрасы және ҚР БЖҒМ Қазақ ұлттық аграрлық университетінің «IT - технологиялар және автоматтандыру» кафедрасының ғылыми семинарларында баяндалып отырылды. Сондай-ақ жұмыста алынған нәтижелердің бір бөлігі төменде тізімі келтірілген Республикалық және халықаралық конференцияларда баяндалған:

- 1) «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах Европы и Азии» XXXVII Международной научно-практической интернет-конференции (Переяслав-Хмельницкий, Украина, 29-30 апреля, 2017).
- 2) «Проблемы и перспективы развития современной науки в странах Европы и Азии» III Международной научно-практической интернет-конференции (Переяслав-Хмельницкий, Украина, 30 апреля, 2018).

3) Посвященная 80-летию юбилею профессора Бияшева Р.Г «Информатика и прикладная математика» III Международной научной конференции (Алматы, 2018).

Диссертациялық тақырыбымның ғылыми бағдарламалармен байланысы.

Диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасының Білім және Ғылым министрлігі Ғылым комитетінің Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институтында бекітілген PhD докторлық диссертациялар жоспарына және ЖТН – АР «3322/ГФ4» жоба негізінде сәйкес орындалды.

Нәтижелердің жарияланымдары. Диссертация тақырыбы бойынша алынған нәтижелері 10 баспалық жұмыста жарияланды. Оның ішінде халықаралық реферативтік базаларына енетін басылымдарында жарияланған мақалалар:

1) Investigation of the Steady Nonlinear-Thermomechanical State of a Rod of Limited Length and Constant Cross-Section in the Presence of Symmetrical Local Thermal Insulation, Lateral Heat Exchanges and End Heat Fluxes // Journal of Advanced Physics. Vol.7, pp.1-5,2018

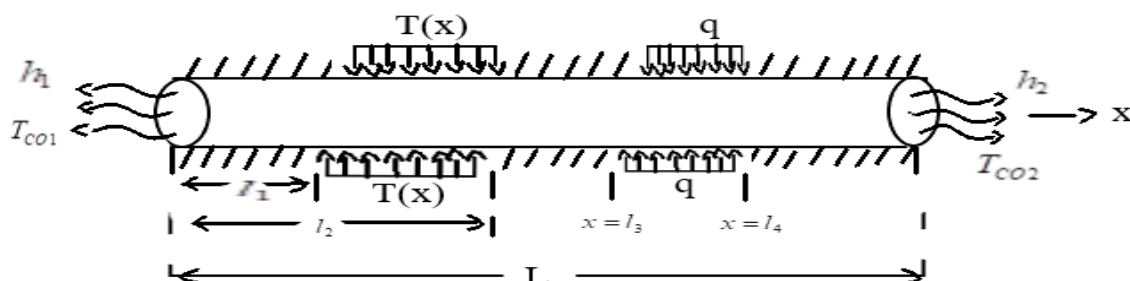
2) A computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section// Open Engineering, Vol. 8, pp.170-175, 2018 (CiteScore – 1,2; 46 percentile)

Жұмыс көлемі мен құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспе, 3 тарау, қорытынды және пайдаланылған әдебиеттерден тұрады. Диссертацияның толық көлемі: 81 бет жазба мәтіні, соның ішінде 12 сурет, 7 кесте, 104 пайдаланылған әдебиеттер тізімі атаудан тұрады.

1 СТЕРЖЕНДЕРДІ ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУ ЖӘНЕ СПЛАЙН ФУНКЦИЯЛАРДЫ ҚҰРУ АЛГОРИТМДЕРІ

1.1 Локалдық жылу көздерін есепке ала отыра стерженді дискретизациялау алгоритмі

Шекті ұзындығы L [см] болған горизонтал стерженді қарастырайық. Координата осі ОХ-ті солдан оңға қарай бағыттайық. ОХ осі стержень осі арқылы өткен болады. Стерженнің көлденең қима ауданы F [см²], оның ұзындығы бойынша тұрақты шама. Стержень материалының физика-механикалық қасиеттері мыналардан тұрады: $\alpha \left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ – стержень материалының жылудан кеңею коэффициенті; $K_{xx} \left[\frac{W}{cm \cdot ^{\circ}C} \right]$ – стержень материалының жылу өткізгіштік коэффициенті; $E \left[\frac{кГ}{cm^2} \right]$ – стержень материалының серпімділік модулі. Солдан оңға қарай $0 \leq x \leq l_1 \ll L$ аралығында стерженнің бүйір беті жылу өткізбейтін қабатпен қапталған болсын. Ал $l_1 \leq x \leq l_2 \ll L$ аралығында локалдық температура берілген болсын. Тағыда стерженнің $l_2 \leq x \leq l_3 \ll L$ аралығында бүйір беті жылу өткізбейтін қабатпен қапталған болсын. Стерженнің $l_3 \leq x \leq l_4 \ll L$ аралығындағы бүйір бетіне берілген $q \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ жылу ағыны түсіп тұрсын. Стерженнің қалған $l_4 \leq x \leq L$ аралығындағы бүйір беті жылу өткізбейтін қабатпен қапталған болсын. Стерженнің сол шетіндегі ($x=0$) көлденең қима ауданы арқылы сыртқы ортамен жылу алмассын. Мұнда жылу алмасу коэффициенті $h_1 \left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$, ал сол ауданды орап тұрған сыртқы ортаның температурасы $T_{co1} [^{\circ}C]$ болсын. Сондай-ақ стерженнің оң шетіндегі ($x=L$) көлденең қима ауданы арқылы да сол ауданды орап тұрған сыртқы ортамен жылу алмассын. Мұнда жылу алмасу коэффициенті $h_2 \left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$, ал сыртқы ортаның температурасы $T_{co2} [^{\circ}C]$. Бұл мәселенің суреті сурет 1.1-де көрсетілген.



Сурет 1.1 - Есептің сызбасы.

Енді бір n - натурал санын аламыз. Көбінесе ол 10, 20, 30,... сияқты сандар болуы керек. Онда $l = \frac{L}{n}$ [саны], L -мен салыстырғанда өте кіші сан болады.

Онда стерженнің бірінші бөлігінің ұзындығы $l_1 = K_1 \cdot n$ [см], екінші бөлігінің ұзындығы $(l_2 - l_1) = K_2 \cdot n$ [см], үшінші бөлігінің ұзындығы $(l_3 - l_2) = K_3 \cdot n$ [см], төртінші бөлігінің ұзындығы $(l_4 - l_3) = K_4 \cdot n$ [см], ал соңғы бөлігінің ұзындығы $(L_1 - l_4) = K_5 \cdot n$ [см] болады. Мұнда $K_i (i=1 \div 5)$ – натурал сан. Сонда стерженнің бірінші бөлігінің бүйір беті толықтай жылу өткізбейтін қабатпен қапталған болып, ол ұзындығы $l = \frac{L}{n}$ [см] болған K_1 - дана дискрет элементтен тұрады.

Яғни K_1 - дана дискрет элементтің бүйір беті біржынысты шекті шартқа ие. Бұл дегеніміз, стерженнің бірінші K_1 - дана элементінің бүйір беттері толықтай жылу өткізбейтін қабатпен қапталған. Ал әрбір дискрет элементтің ұзындығы $l = \frac{L}{n}$ [см]-ге тең. Енді стерженнің екінші бөлігін қарастырайық. Ол бөліктің ұзындығы $(l_2 - l_1)$ [см]-ге тең. Бұл бөліктің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығы беріліп қойылған. Бұл бөлікте K_2 - дана дискрет элемент болып, әрбір бөліктің ұзындығы l [см]-ге тең. Яғни, стерженнің екінші бөлігінде K_2 - дана дискрет элемент біржынысты. Әрі қарай стерженнің үшінші бөлігінде K_3 - дана дискрет элементтің бүйір беттері жылу өткізбейтін қабатпен қапталған біржынысты. Олардың да әрқайсысының ұзындығы $l = \frac{L}{n}$ [см]. Енді стерженнің төртінші бөлігін зерттейтін болсақ, бұл бөліктегі K_4 - дана дискрет элементтің бүйір бетіне тек қана жылу ағыны түсіп тұр. Бұл дискрет элементтердің ұзындықтары $l = \frac{L}{n}$ [см]-ге тең. Енді стерженнің соңғы бесінші бөлігін қарастырайық: бұл бөлігінде K_5 - дана біржынысты дискрет элементтер болып, олардың барлығының бүйір беттері жылу өткізбейтін қабатпен қапталған және ол дискрет элементтердің әрбірінің ұзындықтары $l = \frac{L}{n}$ [см]- ге тең. Сонымен кез келген стерженді дискреттегенде белгілі бір бөлігінің бүйір бетіндегі біржынысты шекті шартына қарау керек. Сондай-ақ бөліктің ұзындығы бойынша берілген басқа да шарттарға қарау керек болады. Жасалған көптеген есептеу тәжірбиелерінен тағы бір қорытынды барлық дискрет элементтердің ұзындықтары бірдей болғаны қолайлы екендігін көрсетті.

Әзірленген есептеу алгоритмі мен тәсілі жергілікті температура, жылу ағындары, жылу беру және жылу үнемдеу бір мезгілде жұмыс жасайтын тірек құрылымының компоненттерінің жылулық кернеулік күйінің стационарлық есептерін есептеу мүмкіндігі бойынша салыстырмалы түрде әмбебап болып табылады. Дискреттеу үшін функционалдық формула қолданылады, ол оның жалпы жылу энергиясын көрсетеді [12,13]. [14, 15] есептеулер алгоритмі және берілген температура өрісі, екі стерженнің көлденең қимасының ауданына жылу ағындары берілетін және оның бүйірлік бетіндегі жылу берілу температурасының өрісі, компоненттердің деформациясы мен кернеулері, жылу мөлшері туралы заңға негізделген. Сынақ стерженінің физикалық-механикалық

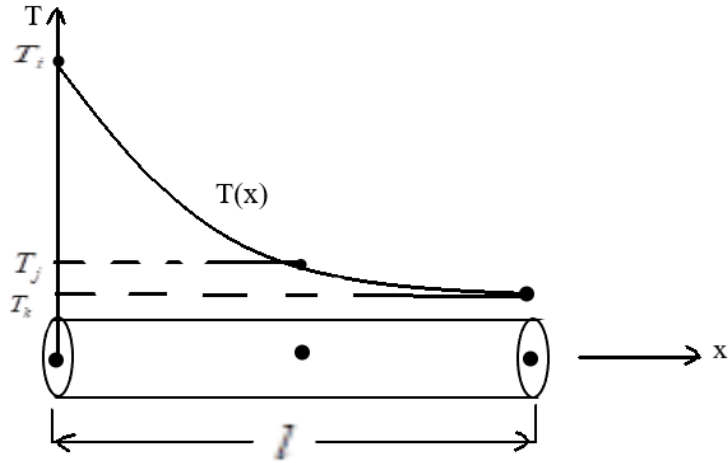
қасиеттері де ескеріледі. Термодинамикалық байланыстар, ядролану, өсу және стресстің әсерлері қарастырылып, термоэластикалық, псевдоэластикалық және мартенситтік түрлендірулермен байланысты жады эффектілеріне қолданылады [16-19]. Бірақ ыстыққа төзімді қорытпалардан жасалған электр станцияларының тірек элементтері әр түрлі жылу көздерінің бір уақытта әсерінен жұмыс істейді. Термиялық кеңею коэффициенттері және отқа төзімді материалдардың серпімді модулі температура функциялары болып табылады. Бұдан шығатын болсақ, бұл жобаның ғылыми жаңалығы толық масштабты тәуелділіктер мен жылу көздерінің жұмыс істейтін гетерогенді түрлерін ескере отырып, ыстыққа төзімді қорытпалардағы тұрақты күйдегі сызықты емес термофизикалық процестерді математикалық модельдеудің теориялық негіздерін құруда жатыр. Сонымен қатар, бұл модель энергияны сақтаудың негізгі заңдарына негізделетін болады.

Бір жақты шектеумен бір өлшемді термоэластикалық мәселе қарастырылды [20]. Бұл жұмыста жанасу интерфейсі арқылы жылу берумен қыздыру кезіндегі жұқа біртекті өзекшенің деформациясын талдауға арналған есептеу моделі енгізілген. Серпімді кедергімен бір жақты жанасуы бар стерженнің термоэластикалық проблемасындағы квазистатикалық процестің схемасы қабылданды. Бірнеше есептеу мысалдарында шекті шешімдерді ақырғы элементтер әдісімен іздейді.

Кернеулердегі серпімділік теориясының температуралық мәселесінің вариациялық принципінің негіздері келтірілген [21]. Бөлшектер мен құрылымдық элементтерді беріктікке есептеу кезінде есептің вариациялық тұжырымы қолданылады. Мақалада вариациялық принцип ұсынылған, оның Эйлер тендеулері кернеулердегі термоэластикалық тендеулер болып табылады.

1.2 Дискрет элемент ұзындығы бойынша екінші дәрежелі сплайн функция құру және олардың қасиеттері

Ұзындығы $l \ll L$ [см] болған горизонталь бір дискрет элементті қарайық. Мұнда ОХ осіне солдан оңға қарай бағытталады. Сондай-ақ ОХ осі стержень дискрет элементінің осінің тура үстінен түссін. Есептеу практикасында $l \leq 0,1$ [см]-ден аспау керек. Сол бір дискрет элементтің сол шетіндегі температураны $T_i = T(x=0)$ деп алайық. Дискрет элементтің ортасындағы температураның мәнін $T_j = T\left(x = \frac{l}{2}\right)$ деп белгілейік. Енді стержень дискрет элементінің оң шетіндегі температураның мәнін $T_k = T(x=l)$ деп белгілейміз. Мәселенің сызбасы сурет 1.2-де көрсетілген.



Сурет 1.2 - Мәселенің сызбасы

Сонымен мынандай қатынастар қалыптасты $T_i = T(x=0)$; $T_j = T\left(x = \frac{l}{2}\right)$;
 $T_k = T(x=l)$ (1.1)

Енді дискрет элемент ұзындығы $(0 \leq x \leq l)$ бойынша температураның таралу заңдылығын екінші дәрежелі толық полином арқылы өрнектейік:

$$T(x) = ax^2 + bx + c, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

Мұнда $a, b, c - \text{const.}$

Онда (1.1 - 1.2)-ден мынадай теңдеулер жүйесін құруға болады:

$$\left. \begin{aligned} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c &= T_i \\ a \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{bl}{2} + c &= T_j \\ a \cdot l^2 + b \cdot l + c &= T_k \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Бұл теңдеулер жүйесін шешіп, a, b, c -лардың мәндері табылады.

$$a = \frac{2T_i - 4T_j + 2T_k}{l^2}; \quad b = \frac{4T_j - 3T_i - T_k}{l}; \quad c = T_i \quad (1.4)$$

Табылған a, b, c -лардың мәндерін (1.2)-формулаға қойып мынадай қатынасты аламыз:

$$T(x) = \frac{2T_i - 4T_j + 2T_k}{l^2} \cdot x^2 + \frac{4T_j - 3T_i - T_k}{l} \cdot x + T_i, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.5)$$

Енді бір өрнекті $T(x) = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k$ көрінісінде ықшамдасақ, мынадай өрнекті аламыз:

$$T(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.6)$$

T_i, T_j және T_k - лардың алдындағы функцияларды былайша белгілейік:

$$\varphi_i(x) = \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4lx - 4x^2}{l^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - lx}{l^2}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.7)$$

Бұл функцияларды ($0 \leq x \leq l$) жергілікті координата жүйесіндегі квадраттық сплайн функциялар деп атайық. Енді осы сплайн функциялардың қасиеттерін зерттейік.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 - \partial e \\ 0, & x = \frac{l}{2} - \partial e \\ 0, & x = l - \partial e \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 - \partial e \\ 1, & x = \frac{l}{2} - \partial e \\ 0, & x = l - \partial e \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 - \partial e \\ 0, & x = \frac{l}{2} - \partial e \\ 1, & x = l - \partial e \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) + \varphi_j(x) + \varphi_k(x) = 1 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} T_i + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} T_j + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} T_k =$$

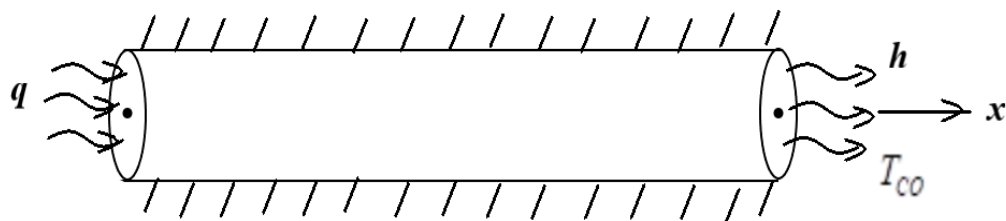
$$= \frac{4x-3l}{l^2} T_i + \frac{4l-8x}{l^2} T_j + \frac{4x-l}{l^2} T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0 \quad (1.11)$$

Жергілікті координата жүйесінде құрылған екінші дәрежелі сплайн функциялардың (1.8,1.9,1.11) қасиеттері функцияның бір дискрет элементтен көрші дискрет элементіне өткендегі үздіксіздігін қамтамасыз етеді. Егер алынған n – натурал санын еселеп арттырсақ, онда алынатын сандық нәтижелердің дәлдігі аса түседі.

1.3 Стерженде жылу таралу заңын табудағы тестілік есепті энергетикалық әдіспен шығару

Стерженде жылу таралуының мынадай тестілік есебін энергияның сақталу заңын қолдана отырып шешуді қаралық. Мұнда бүйір беті толық жылу өткізбейтін қабатпен қапталған, ұзындығы l [см] болған горизонталь стерженді зерттейік. Бұл стерженнің көлденең қима ауданы F [см²] болады, ол – ұзындық бойынша тұрақты. Координата ОХ осін солдан оңға қарай бағыттайық. Бұл стерженнің сол жақ көлденең ауданына q $\left[\frac{W}{cm^2} \right]$ жылу ағыны түсіп тұрсын. Ал стерженнің оң шетіндегі көлденең қима ауданы арқылы сыртқы ортамен жылу алмассын. Мұнда сол сыртқы ортаның температурасы T_{co} [°C], ал жылу алмасу коэффициенті h $\left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^\circ C} \right]$ болсын. Осындай жағдайдағы стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығын энергияның сақталу заңын пайдалана отыра табайық. Бұл есептің сызбасы сурет 1.3-те көрсетілген.



Сурет 1.3 - Локалдық жылу ағыны, жылу изоляциясы және жылу алмасу әсеріндегі стержень

Мұнда өткізілген физикалық тәжірбиелерден алынған мынадай нәтижелерден пайдаланамыз. Зерттеліп жатқан стержень материалының жылу өткізгіштік коэффициенті $K_{xx} \left[\frac{W}{cm \cdot ^\circ C} \right]$. Оның мәні стержень радиусының мәнінен 75-100 еседей артық. Сондықтан да температураның ОХ осіне перпендикуляр бағытындағы градиентін нөлге тең деп алуға болады. Онда тұрақталған температуралық мәселелерде стерженнің ОХ осіне перпендикуляр қимасының барлық нүктелерінде температураның мәні бірдей болады деп алуға болады. Демек берілген мәселеде стерженнің ұзындығы бойынша тұрақталған жылу өрісін табу бір өлшемді болады. Енді сурет 1.3-те көрсетілген стержень үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалды жазайық [1,2].

$$I = \int_{F(x=0)} q \cdot T ds + \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds \quad (1.12)$$

Бұл өрнектегі әрбір интегралды зерттейік.

$$I_1 = \int_{F(x=0)} q T ds \rightarrow \text{бұл интегралдың өлшем бірлігі} \left[\frac{W}{cm^2} \right] \cdot C \cdot cm^2 = [W \cdot ^\circ C].$$

Бұл температураның орындаған жұмысын көрсетеді. Мұнда температура стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданына түсіп тұрған q жылу ағынынан пайда болған. Енді (1.12)-функционал өрнегіндегі екінші мүшені зерттейік.

$$I_2 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV, \text{ мұнда } V - \text{ стерженнің көлемі. Бұл интегралдың өлшем}$$

бірлігін көрейік: $\left[\frac{W}{cm \cdot ^\circ C} \right] \left[\frac{^\circ C}{cm} \right]^2 \cdot cm^3 = [W \cdot ^\circ C]$. Яғни, бұл да температураның

орындаған жұмысын көрсетеді. Яғни, стержень көлеміндегі шоғырланған температурада бір жұмысты орындайды.

Енді функционалдың (1.12) өрнегіндегі соңғы, үшінші мүшені зерттейік.

$$I_3 = \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds. \text{ Бұл - интеграл, стерженнің оң шетіндегі көлденең қима}$$

ауданы арқылы сыртқы ортамен болатын конвективті жылу алмасу процесін анықтайды. Оның өлшем бірлігі $\left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^\circ C} \right] \cdot [^\circ C]^2 \cdot cm^2 = [W \cdot ^\circ C]$ - ті көрсетеді. Демек,

бұл да температураның орындаған жұмысын айқындайды. Сонымен берілген стержень үшін толық жылу энергиясын айқындайтын I функционал температураның орындаған жұмысын көрсетеді екен. Енді (1.12) өрнектегі I - функционалдың әрбір мүшесінің интегралданған көрінісін табамыз.

$$I_1 = \int_{F(x=0)} qTds = F \cdot q \cdot T_i \quad (1.13)$$

мұнда $T_i = T(x=0)$. Енді I - функционалдың екінші мүшесін интегралдаймыз:

$$I_2 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = F \int_0^l \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{F \cdot K_{xx}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{F \cdot K_{xx}}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) T_k \right]^2 dx$$

мұнда $T_i = T(x=0)$; $T_j = T\left(x = \frac{l}{2}\right)$; $T_k = T(x=l)$.

I_2 -ні есептеуді жалғастырамыз.

$$I_2 = \frac{F \cdot K_{xx}}{2l^4} \int_0^l [(16x^2 - 24lx + 9l^2) T_i^2 + 2(40lx - 32x^2 - 12l^2) \cdot T_i \cdot T_j +$$

$$+ 2(16x^2 - 16lx + 3l^2) \cdot T_i \cdot T_k + 2(24lx - 4l^2 - 32x^2) \cdot T_j \cdot T_k +$$

$$+ (16l^2 - 64lx + 64x^2) T_j^2 + (16x^2 - 8lx + l^2) T_k^2] dx =$$

$$= \frac{F \cdot K_{xx}}{2l^4} \left[\left(\frac{16x^3}{3} - 12lx^2 + 9l^2x \right) T_i^2 + \left(40lx^2 - \frac{64x^3}{3} - 24l^2x \right) T_i \cdot T_j + \right.$$

$$+ \left(\frac{32x^3}{3} - 16lx^2 + 6l^2x \right) \cdot T_i \cdot T_k + \left(24lx^2 - 8l^2x - \frac{64x^3}{3} \right) \cdot T_j \cdot T_k +$$

$$\left. + \left(16l^2x - 32lx^2 + \frac{64x^3}{3} \right) T_j^2 + \left(\frac{16x^3}{3} - 4lx^2 + l^2x \right) T_k^2 \right] \Big|_0^l;$$

Осы есептеуді аяқтау барысында I_2 функционалының интегралданған түрін табамыз:

$$I_2 = \frac{F \cdot K_{xx}}{6l} (7T_i^2 - 16T_i T_j + 2T_i T_k - 16T_j T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2) \quad (1.14)$$

Бұл жерде басты мән беретін жайт: түйіндік температура коэффициенттерінің қосындысы нөлге тең болады.

$$7-16+2-16+16+7=0.$$

Енді I - нің (1.12) өрнегіндегі соңғы мүшені зерттейік:

$$I_3 = \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds = \frac{Fh}{2} (T_k - T_{co})^2 \quad (1.15)$$

Соңғы (1.13-1.15) өрнектерді пайдаланып стерженнің толық жылу энергиясының интегралданған көрінісін табамыз.

$$I = F \cdot q \cdot T_i + \frac{F \cdot K_{xx}}{6l} (7T_i^2 - 16 \cdot T_i \cdot T_j + 2T_i \cdot T_k - 16T_j \cdot T_k + 16T_j^2 + 7T_k^2) +$$

$$+ \frac{Fh}{2} (T_k - T_{co})^2 \quad (1.16)$$

Мұнда T_i , T_j , T_k - лардың мәндері белгісіз. Бірақ олардың мәндері энергияның сақталу заңын қанағаттандыруы қажет. Онда оларды анықтау үшін (1.16) функционалды пайдаланып, төмендегідей шешуші теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0; &\Rightarrow F \cdot q + \frac{F \cdot K_{xx}}{6l} (14T_i - 16T_j + 2T_k) = 0 \\ 2) \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{F \cdot K_{xx}}{6l} (-16T_i + 32T_j - 16T_k) = 0 \\ 3) \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; &\Rightarrow \frac{F \cdot K_{xx}}{6l} (2T_i - 16T_j + 14T_k) + F \cdot h \cdot T_k - F \cdot h \cdot T_{CO} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Немесе ықшамдағаннан кейін энергияның сақталу заңын қанағаттандыратын шешуші теңдеулер жүйесінің мынадай түрін аламыз:

$$\left. \begin{aligned} 7T_i - 8T_j + T_k &= -\frac{3ql}{K_{xx}} \\ T_i - 2T_j + T_k &= 0 \\ T_i - 8T_j + 7T_k + \frac{3hl}{K_{xx}} \cdot T_k &= \frac{3hlT_{CO}}{K_{xx}} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Бұл теңдеулер жүйесін шешеміз. (1.18)-жүйенің екінші теңдеуінен T_i - ді T_j және T_k арқылы өрнектейік:

$$T_i = 2T_j - T_k \quad (1.19)$$

Енді (1.19)-ды (1.18)-жүйенің 1-ші және 3-ші теңдеулеріне қойып, ықшамдасақ, мынадай теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left. \begin{aligned} 6T_j - 6T_k &= -\frac{3ql}{K_{xx}} \\ -6T_j + 6T_k + \frac{3hl}{K_{xx}} \cdot T_k &= \frac{3hlT_{CO}}{K_{xx}} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Бұл жүйенің 1-ші теңдеуінен мынаны аламыз:

$$-6T_j + 6T_k = \frac{3ql}{K_{xx}} \quad (1.21)$$

Енді (1.21)-ді, (1.20)-шы жүйенің екінші теңдеуіне қойсақ, мынадай теңдеу аламыз:

$$\frac{3ql}{K_{xx}} + \frac{3hl}{K_{xx}} \cdot T_k = \frac{3hlT_{CO}}{K_{xx}}, \text{ немесе } \frac{3hl}{K_{xx}} \cdot T_k = \frac{3hlT_{CO}}{K_{xx}} - \frac{3ql}{K_{xx}}, \text{ немесе } T_k = T_{CO} - \frac{q}{h}. \quad (1.22)$$

Табылған T_k - нің өрнегін (1.21) теңдеуге қойып, T_j -нің мәнін табамыз:

$$T_j = T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{2K_{xx}} \quad (1.23)$$

Табылған T_j, T_k - лардың мәндерін (1.19)-ға қойып T_i -дің мәнін табамыз:

$$T_i = T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \quad (1.24)$$

Енді табылған (1.22-1.24) шешімдерді пайдаланып, зерттеліп жатқан стерженнің ұзындығы бойынша тұрақталған жылу өрісін, яғни жылу таралу заңдылығын табамыз:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_k = \\
&= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) \left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) \left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{2K_{xx}} \right) + \\
&+ \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \left(T_{co} - \frac{q}{h} \right) = \left(\frac{2x^2 - 4x^2 + 2x^2}{l^2} \right) T_{co} + \left(\frac{4lx - 3lx - lx}{l^2} \right) T_{co} + \\
&+ \left(\frac{l^2}{l^2} \right) T_{co} - \left(\frac{2x^2 - 4x^2 + 2x^2}{l^2} \right) \frac{q}{h} - \left(\frac{4lx - 3lx - lx}{l^2} \right) \frac{q}{h} - \left(\frac{l^2}{l^2} \right) \frac{q}{h} - \\
&- \left(\frac{2x^2 - 2x^2}{l^2} \right) \frac{ql}{K_{xx}} - \left(\frac{2lx - 3lx}{l^2} \right) \frac{ql}{K_{xx}} - \left(\frac{l^2}{l^2} \right) \frac{ql}{K_{xx}} = \\
&= T_{co} - \frac{q}{h} + \frac{qx}{K_{xx}} - \frac{ql}{K_{xx}} = \left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} x; \text{ яғни} \\
T(x, T_{co}, q, h, l, K_{xx}) &= \left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} x;
\end{aligned}$$

Сонымен берілген мәселеде стержень ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығы сызықты болады екен.

$$T(x) = kx + b, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.25)$$

$$\text{мұнда } k = \frac{q}{K_{xx}}; \quad b = \left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) \quad (1.26)$$

Мұнда жылу физикасынан белгілі болғандай q -жылу ағыны ауданға түсіп тұрғанда оның мәні теріс таңбамен алынады, яғни $q < 0$. Сондықтан да (1.25) формуладан көрініп тұрғандай температураның мәні T_{co} , және q -ға тура пропорционал, ал h пен K_{xx} -қа және x -қа кері пропорционал болады екен. Энергияның сақталу заңы арқылы табылған (1.25) шешім классик шешіммен бірдей шықты. Мұнда алынған шешім энергияның сақталу заңын толықтай қанағаттандырады.

Қарапайым жалғанған және көбейтілген байланысқан, оның бетіне жылу көздері әсер ететін призматикалық стержень қарастырылды [22]. Композициялық стержендер шекараларының пішінін оңтайландыру мәселесін шешуге қажетті функционалды бұралу қаттылығының сезімталдық коэффициенттерін шығарудың ерекшелігі - бұқаралық ақпарат құралдары арасында ішкі интерфейснің болуы, бұл оңтайландыру мәселелерінің кең ауқымын қоюға мүмкіндік береді. [23] зерттеу тақырыбы - осі шеңбер доғасы болып табылатын, дөңгелек көлденең қимасы бар қисық сызықты құбырлы стержендер. Стержень талшықтарды стержень генератрикасына әр түрлі бұрыштармен орау арқылы пайда болады. Мұндай стержендердің құрылымы қарастырылады және барлық күштер түйіндерде қолданылады деп саналады. Мұндай стержень-құрылымдық элементтер үшін тепе-теңдік теңдеулерін, кинематикалық теңдеулер мен физикалық теңдеулерді қамтитын жазық

кималар гипотезасы негізінде құрылған теңдеулер жүйесі алынады. Бұдан әрі қоныс аудару мәселесі шешілді.

[24] -де күрделі геометриялы денеге арналған екі өлшемді формуладағы коньюгатылық жылу алмасудың стационарлық және стационарлық емес мәселесі шешілді. Жылу ағындарының бағасы Prandtl теңдеулерін ішкі мәселені шешпей, сонымен қатар жылу беру коэффициенттерін қолданбай, ағынды беттің күйі туралы белгілі бір болжамдар бойынша шешуге негізделген. Ортогональды координаттар жүйесінің құрылысы денелердің кең класы үшін есептерді шешуге, есептеу көлемін азайтуға және қайталану процесінің конвергенциясын жақсартуға мүмкіндік береді. [25] стационарлық жағдайда суық өнімдері бар құбырдың жылытылатын мұнай құбырына жылу эффектісін зерттеу үшін сандық модельдеу нәтижелері келтірілген. Қытайдың батысында орналасқан құбырлар қарастырылып, бензинмен қатар тиісті кен орны мұнайының ерекше физикалық қасиеттері алынды. Әр түрлі жағдайларда алынған құбырлардың ұзындығының көрсетілген жылу эффектісіне әсері туралы мәліметтер келтірілген. [26] жылы жылу беру эксперименталды түрде толығымен зерттелді эксцентрикалық түтік айналасындағы көлденең ағынмен мәжбүрлі конвекцияны дамытты. Шабуыл бұрышы және Рейнольдс саны сәйкесінше $0-180^\circ$ және $1,5 \times 10^4 - 2,7 \times 10^4$ аралығында өзгерді. Тәжірибелер нәтижелері көрсеткендей, жылу беру коэффициенті Ренольдс санының барлық өзгеру диапазонында 90° -қа тең шабуыл бұрышында максимумға ие. Құбырлардың эксцентриситетінің әсері талқыланады. [27] жылы зерттелетін процестің математикалық моделіне сүйене отырып есептеу әдісі ұсынылады, бұл ішкі жану қозғалтқыштарының цилиндрлік астарларының салқындату қуыстарындағы жылу мен массаның берілуін, салқындатқыштың төменгі тізбегіне қолданылатындай етіп есептеуге мүмкіндік береді. Көлденең, жоғарғы қоректену схемасы немесе олардың тіркесімдері жағдайында сұйықтық ағыны кеңістіктік құрылымға ие және бұл екі өлшемді модель қолданылмайды. Алайда, математикалық модельді қалыптастыру үшін қолданылатын тәсілдер шеңберінде есепті үш өлшемді тұжырымдау да мүмкін.

1.4 Стерженнің термо – механикалық күйін зерттеу алгоритмі

Алдыңғы бөлімде қаралған стерженнің бір шеті бекітілген, ал екінші шеті бос болсын. Мысалы, стерженнің сол шеті мықтап бекітілген, ал оң шеті бос болсын. Онда стержень жылу көздері әсерінен жылып, нәтижеде ол ұзарады. Оның ұзару мөлшері Δl_T жылу физикасының негізі заңына сәйкес табылады [47]

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x) dx \quad (1.27)$$

Мұнда α – стержень материалының жылудан кеңею коэффициенті. Оның өлшем бірлігі $-\alpha \left[\frac{1}{^\circ C} \right]$. Стержень материалының жылудан кеңею

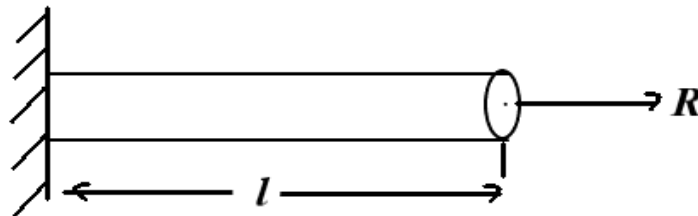
коэффициентінің мәні арнайы эксперименттер арқылы табылады. Жалпы жағдайда ол температураға да тәуелді. Кез келген қоспа материалдардың жылудан кеңею коэффициентінің мәні әртүрлі температураларда әртүрлі болады. Сондай-ақ көптеген қоспа материалдар үшін α -нің мәні $20^0 \div 100^0$ С аралығында өзгермейтіндігі анықталған. Егерде $\alpha = const$ деп алатын болсақ, онда стерженнің жылу өрісінен ұзару мөлшері былайша анықталады:

$$\begin{aligned} \Delta l_T &= \int_0^l \alpha T(x) dx = \alpha \int_0^l \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} x \right] dx = \\ &= \alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) x + \frac{q}{K_{xx}} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) l + \frac{ql^2}{2K_{xx}} \right] = \\ &= \alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} \right) l - \frac{ql^2}{2K_{xx}} \right]. \end{aligned}$$

Сонымен, пайда болған $T = T(x, T_{CO}, q, h, K_{xx}, l)$. Жылу өрісі әсерінен стерженнің ұзаруы мынадай байланыстардан тұрады екен:

$$\Delta l_T(\alpha, T_{CO}, q, h, l, K_{xx}) = \alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} \right) l - \frac{ql^2}{2K_{xx}} \right] \quad (1.28)$$

Енді зерттеліп жатқан стерженнің екі шеті де мықтап бекітілген болсын. Онда ол ұзара алмайды. Бірақ жылудан кеңеюдің есебінен стерженнің осі бойынша бағытталған сығушы R [кГ] күші пайда болады. Енді сол күштің мөлшерін анықтау алгоритмін қарайық. Ол үшін сол шеті мықтап бекітілген, ал оң шеті бос болып, оң шетіне сығушы R күш қойылған болсын. Мәселенің сызбасы сурет 1.4-те көрсетілген.



Сурет 1.4 - Мәселенің сызбасы

Гук заңына сәйкес сығушы R күш әсеріндегі стержень Δl_R [см] - ге қысқарады. Оның мөлшері былайша табылады:

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EF} \quad (1.29)$$

Мұнда E – стержень материалының серпімділік модулі $E \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$.

Ал стерженнің екі шеті бекітілгенде ол ұзара да, қысқара да алмайды. Сондықтан да мынадай теңдеу орынды болады:

$$\Delta l_R + \Delta l_T = 0 \quad (1.30)$$

Немесе, (1.29)-ды (1.30)-ға қойып R -ді анықтауға болады:

$$\frac{Rl}{EF} + \Delta l_T = 0, \text{ немесе}$$

$$R = -\frac{\Delta l_T EF}{l} \quad (1.31)$$

немесе (1.28)-ді (1.31)-ге қойып мынаны табуға болады:

$$R(\alpha, E, F, l, T_{co}, q, h, K_{xx}) = -\alpha EF \left[\left(T_{co} - \frac{q}{h} \right) - \frac{ql}{2K_{xx}} \right] [\kappa\Gamma] \quad (1.32)$$

Сонымен зерттеліп жатқан стержендегі берілген жылу көздері әсерінен пайда болатын (егер стерженнің екі шеті мықтап бекітілсе) R сығушы күштің мөлшері «8» параметрге тәуелді болар екен. R -күштің табиғаты сығушы болғандықтан ол теріс таңбамен болады, яғни $R < 0$.

Стерженнің екі шеті бекітілген жағдайда әртүрлі жылу көздерінің әсерінен термо-серпімді кернеу пайда болады. Оның стержень ұзындығы бойынша таралу заңдылығы Гук заңына сәйкес табылады: [48].

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\alpha E \left[\left(T_{co} - \frac{q}{h} \right) - \frac{ql}{2K_{xx}} \right] \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right] \quad (1.33)$$

Мұнда $\sigma = \sigma(\alpha, E, T_{co}, q, h, l, K_{xx})$ жеті параметрге байланысты, ол стержень ұзындығы бойынша тұрақты, яғни $\sigma = const$, $0 \leq x \leq l$ болады екен. Мұнда σ сығушы характерде болады, себебі $\sigma < 0$. Онда Гук заңына сәйкес берілген мысалда стержень ұзындығы бойынша термо-серпімділік деформациясының таралу заңдылығын табуға болады:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\alpha \left[\left(T_{co} - \frac{q}{h} \right) - \frac{ql}{2K_{xx}} \right] [\text{өлшеусіз}] \quad (1.34)$$

ε да сығушы характерде болады екен. Соңғы формуладан көрініп тұрғандай термо-серпімділік деформациясы берілген мысалда б-параметрге байланысты болады екен. Сондай-ақ, ε стержень ұзындығы бойынша тұрақты шама болады, яғни $\varepsilon = const$, $0 \leq x \leq l$. Енді жоғарыдағы мәселеде стерженнің ұзындығы бойынша температуралық деформацияның таралу заңдылығын табамыз. Ол жылу физикасының заңдарына сәйкес табылады.

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha \cdot T(x) = -\alpha \left[\left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} \cdot x \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.35)$$

Бұл формуладан көрініп тұрғанымыздай, берілген мәселеде стержень ұзындығы бойынша жылу таралуы сызықты характерде болады. Сондай-ақ, стержень ұзындығы бойынша $\varepsilon_T(x)$ -тің характері сығушы болады. Себебі стержень ұзындығы бойынша $\varepsilon_T < 0$ болады.

Енді Гук заңына сәйкес стержень ұзындығы бойынша температуралық кернеудің таралу заңдылығын табамыз.

$$\sigma_T(x) = E \cdot \varepsilon_T(x) = -\alpha E \left[\left(T_{co} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} \cdot x \right], \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.36)$$

Мұнда $\sigma_T(x)$ стержень ұзындығы бойынша сығушы характерге ие болады. Себебі $\sigma_T(x) < 0$, $0 \leq x \leq l$. Енді термо-серпімділік теориясына сәйкес стержень ұзындығы бойынша серпімділік деформациясының таралу заңын табамыз.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x) &= \varepsilon - \varepsilon_T(x) = -\alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} \right) - \frac{ql}{2K_{xx}} \right] + \alpha \left[\left(T_{CO} - \frac{q}{h} - \frac{ql}{K_{xx}} \right) + \frac{q}{K_{xx}} \cdot x \right] = \\
&= -\alpha \cdot T_{CO} + \frac{\alpha q}{h} + \frac{\alpha ql}{2K_{xx}} + \alpha \cdot T_{CO} - \frac{\alpha q}{h} - \frac{\alpha ql}{K_{xx}} + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot x = \\
&= -\frac{\alpha ql}{2K_{xx}} + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot x, \quad 0 \leq x \leq l
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Мұнда $q < 0$ екендігін ескерсек, онда $0 \leq x < \frac{l}{2}$ аралығында $\varepsilon_x(x) > 0$ болады, яғни бұл аралықта $\varepsilon_x(x)$ -тің характері созушы болады. Ал $\frac{l}{2} < x \leq l$ аралығында $\varepsilon_x(x) < 0$ болып, бұл аралықта серпімділік деформациясы сығушы болады. Ал $x = \frac{l}{2}$ - де $\varepsilon_x\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0$ болады екен.

Енді зерттеліп жатқан стерженнің ұзындығы бойынша серпімділік кернеуінің таралу заңын табамыз. Гук заңына сәйкес

$$\sigma_x(x) = \sigma - \sigma_T(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = -\alpha E q \left(\frac{l}{2K_{xx}} + \frac{x}{K_{xx}} \right), \quad 0 \leq x \leq l \tag{1.38}$$

Мұнда серпімділік кернеуі стерженнің $0 \leq x < \frac{l}{2}$ бөлігінде созушы, ал $\frac{l}{2} < x \leq l$ бөлігінде сығушы характерде болады. Ал $x = \frac{l}{2}$ - де $\sigma_x\left(x = \frac{l}{2}\right) = 0$ болады екен.

Сонымен серпімділік деформациясымен кернеуі стерженнің ұзындығы бойынша сызықты таралып, стерженнің сол жартысында созушы, ал оң жартысында сығушы характерге ие болады екен. Ал стерженнің ортасында екеуіде нөлге тең болады.

Енді зерттеліп жатқан стерженде берілген әртүрлі локалдық жылу көздері әсерінен пайда болатын орын ауыстыру заңын табудың алгоритмін көрейік. Берілген стерженнің көлденең қималары әртүрлі жылу көздерінің әсерінен орын ауыстырады. Орын ауыстыру заңын жылу физикасы, термо-серпімділік теориясы, және серпімділік теориясында $u = u(x)$ арқылы өрнектейді. Сондай-ақ серпімділік деформациясы $\varepsilon_x(x)$, орын ауыстыру арқылы Коши формуласымен өрнектеледі,

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l \tag{1.39}$$

Бұл формуладан $u(x)$ - ті табамыз.

$$u(x) = \int \varepsilon_x(x) dx + C \tag{1.40}$$

Мұнда $C = const$ - интегралдау тұрақтысы. C -нің мәні берілген шекті шарттардан табылады. Енді (1.37)-формуланы (1.40)-қа қойып мынадай өрнекті аламыз:

$$u(x) = \int \left[-\frac{\alpha ql}{2K_{xx}} + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot x \right] dx + C =$$

$$= -\frac{\alpha q l}{2K_{xx}} \cdot x + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot \frac{x^2}{2} + C \quad (1.41)$$

Енді зерттеліп жатқан стерженнің екі шетіндегі шекті шарттарды қарайық. Бұл стерженнің екі шеті де мықтап бекітілген. Онда $u(x=0) = u(x=l) = 0$ болады.

Табылған (1.41) өрнектен және $u(x=l) = 0$ шарттан C тұрақтының мәнін табамыз.

$$u(x=l) = -\frac{\alpha q l}{2K_{xx}} \cdot l + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot \frac{l^2}{2} + C = 0$$

Бұдан $C=0$ екендігі айқын болады. Сонымен біздің мысалда стерженнің ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңы екінші дәрежелі қисық сызықпен өрнектеледі екен, яғни

$$u(x) = -\frac{\alpha q l}{2K_{xx}} \cdot x + \frac{\alpha q}{K_{xx}} \cdot \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.42)$$

Табылған орын ауыстыру заңдылығынан, оның параболалық көріністе болатыны және $u(x=0) = u(x=l) = 0$ болатыны көрініп тұр. Сондай-ақ

$$u_{\max} = u\left(x = \frac{l}{2}\right) = -\frac{3\alpha q l^2}{8K_{xx}} \text{ болады екен.}$$

[28] жылы диаметрі 100 мкм суға батырылған қыздырылған платина сымның айналасындағы өтпелі және стационарлық табиғи конвекция зерттелді. Конвекцияның басталуының есептелген шарттары тәжірибелік мәліметтермен сәйкес келеді. Сымның ауада қызуы да зерттелді. Жарияланған тәжірибелік мәліметтермен салыстыру жақсы келісімді көрсетті. Жылу құбырлары (ТП) ғарыш аппараттарының термиялық басқару жүйелерінде (РТС) кеңінен қолданылады. Тиісті температуралық жағдайларды есептеуге арналған көптеген компьютерлік бағдарламалар бар. [29] жылы бүкіл жүйенің элементі болып табылатын жылу құбырларымен үш түрлі жүйені модельдеу қарастырылған. Жылу құбырларының СТР элементтерімен жылулық және механикалық байланысының әртүрлілігі бағдарламалар мен ақырлы элементтер мен ақырлы айырмашылықтарды қолдануды бағалау үшін өте маңызды практикалық құралға айналдырады. ТТ-мен СТР үйлесімділігі. Капиллярлық қысым әсерінен жылу теңдеуінің кеуекті ортадағы сұйықтықты сүзу теңдеуіне формальді ұқсастығы жылу өткізгіштік есептерге арналған есептеу бағдарламасын қолдануға мүмкіндік беретін мәселе қарастырылады, жылу өткізгіштік міндеттеріне арналған, ТТ ауырлық күшімен бірге немесе оған қарсы жұмыс істеген кезде ТТ беретін жылу мөлшерін анықтау. [30] -де квадраттық ақырлы элементпен ұштастыра отырып энергетикалық принциптің негізінде температура өрісінің ұзындығы шектеулі және көлденең қимасы тұрақты құбыр бойымен таралуының тұрақты процесі сандық түрде имитацияланады. Бұл жағдайда жылу ағыны сол жақ ұшының көлденең қимасының ауданына беріледі, ал оның ортасымен жылу алмасу оң жақ ұшының көлденең қимасының ауданы арқылы жүреді. Жылу алмасу сонымен қатар ішкі және сыртқы бүйір беттерінің аудандары арқылы жүреді. Бұл барлық

ортаның температурасын ескереді. [31] серпімді деформацияның жалпы жылу және потенциалдық энергиясын үш түйіні бар квадратты ақырлы элементті қолданумен бірге минимизациялауға бағытталған энергетикалық принциптер негізінде жүргізілгеннен математикалық модель, есептеу алгоритмі және екіге ауыстырылған термиялық кернеулі күй жасалынған әдіс жасалды. ішінара жылу оқшаулаудың, жылу ағынының және жылу берілудің болуына байланысты тұрақты қимасы бар өзекшенің ұштары. [32] жылыту кезінде жерге төселген өздігінен өтелетін құбырөткізгіштердің беріктігін есептеу мәселесі қарастырылған. Термиялық созылулардың орнын толтыру сәйкес қаттылық коэффициентімен серпімді ортадағы құбырөткізгіштің иілу деформациясы есебінен жүреді деп есептеледі. Ыстық суды тасымалдау кезінде пайда болатын жылу кезінде осындай құрылымдардың беріктігін есептеу әдісі келтірілген.

[33] ғарыш аппараттарында қолданылатын ұзартылатын жіңішке қабырғалы шыбықтарды әртүрлі жүктемелер мен құрылғыларға арналған кеңейтімдер ретінде, сондай-ақ гравитациялық тұрақтандыру штангаларын сипаттайды. Бұл шыбықтар барабанға алдын ала керілген металл жолақтан пайда болады. Егер барабаннан шыққаннан кейін бүйірлік құбырлы шеттермен дәнекерленген екі таспа қабаты әр түрлі бағытта бүгілсе, онда шеңберге жақын көлденең қимасының контуры жабық құбырлы өзек алынады. Мұндай таяқшалар ұзын болуы мүмкін және күн сәулесінің әсерінен олар айтарлықтай термоэластикалық иілуді, мәжбүрлі тербелістерді (бағдарлануы мен жарықтандыру өзгерісімен) және өздігінен тербелістерді (серпімді деформациялардың сәулелер түсу бұрыштарына және жылу ағынына байланысты динамикалық тұрақсыздыққа байланысты) сезінуі мүмкін. Сыртқы және ішкі жылу сәулеленуіне жол беретін жұқа қабырғалы дөңгелек штанганың күшті термоэластикалық иілу және жылу өткізгіштігінің байланыссыз сызықтық емес мәселесі қарастырылып, оның сандық шешімі алынған. Сонымен қатар, сызықтық емес байланысқан есептің нақты аналитикалық шешімі сәулеленуді ескерусіз алынады.

[34] жылы функционалды салынды, оның домені жылу ағынының және температураның тәуелсіз осимметриялық өрістері болып табылады және оның стационарлық мәні ағынның тепе-теңдік теңдеуіне, Фурье заңына және осимметриялық дененің әртүрлі бөліктерінде көрсетілген шекаралық шарттардың үш түріне сәйкес келеді - берілген температура, жылу ағыны және жылу беру жағдайы. Шектік есептердің вариациялық тұжырымдамасы негізінде элементтер арасындағы температуралық өрістің үздіксіздігі мен есептеу процесінің тұрақтылығын қамтамасыз ететін ақырғы элемент әдісі құрылады. Қуыс ақырлы цилиндрге, қуыс сфераға және торуска арналған сандық мысалдар ақырлы элемент әдісінің жинақтылығын және оның дәлдік дәрежесін көрсетеді.

Термомеханикалық жүктеме кезінде термомластикалық сызықтардың созылуын ескере отырып, үлкен ығысу жағдайында шыбықтардың жазықтықта иілуі [35] қарастырылған. Термоэластикалық сызықтың деформациясы және

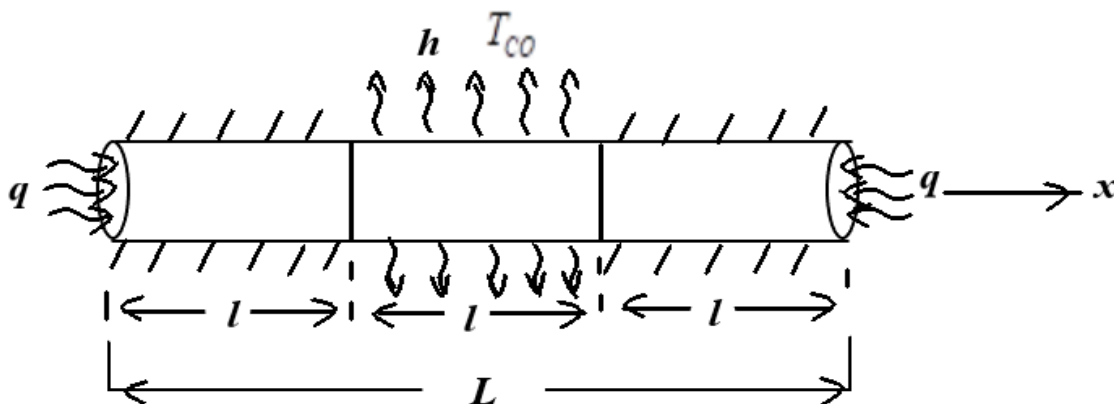
қисықтықтың өзгеруін сипаттайтын параметр өзектің көлденең қимасындағы интегралды тепе-теңдік шарттан анықталады.

[36] жылы цилиндрдің температуралық өрісі мен температуралық кернеулері туралы мәселе қарастырылады, оның бетінде сұйықтық немесе газ берілген температуралық өріспен жүреді, орта мен бет арасындағы жылу беру коэффициенті және цилиндрдің бастапқы температурасы. Цилиндрдің ұштары ортаның температурасын қабылдайды; цилиндрдің ішінде белгілі бір қарқындылығы бар тұрақты емес жылу көздері жұмыс істейді. Есепті шешу үшін ақырлы интегралды Ганкель түрлендіруі мен шекті синус Фурье түрлендіруі дәйекті түрде қолданылады. Кернеулер кернеудің екі түрінің қосындысы ретінде табылған: біріншісі термоэластикалық орын ауыстыру потенциалы арқылы есептеледі, ал екінші кернеулер сүйіспеншілік функциясы арқылы көрінеді. Алынған формулалар нөлдік температурадағы салқындатқыш ортаға батырылған тұрақты бастапқы температурасы бар қатты дөңгелек цилиндрдің белгілі бір мәселесіне қолданылады. Цилиндрдің батырылуы генератрица бағыты бойынша жүреді, сондықтан ұштардағы жылу беру коэффициенті цилиндрлік бетке қарағанда әлдеқайда жоғары болады. Осыған байланысты ұштардағы жылу беру коэффициенті цилиндрлік бетке қарағанда әлдеқайда жоғары деп саналады. Осыған сүйене отырып, ұштардағы жылу беру коэффициенті шексіз үлкен деп саналады, сонымен қатар цилиндрде жылу көздері жоқ деп есептеледі. Цилиндрде пайда болатын температуралық кернеулер үшін формулалар алынады. Компьютердегі температуралық кернеулерді сандық есептеуде цилиндрлік беттегі шеңберлік және осьтік кернеулер қарастырылады. Дәл осы жерде олар ең қауіпті. Цилиндр ішіндегі ығысу кернеулері өз осі бойымен белгілі бір нүктелерде қарастырылады. Ұштардан алыстаған сайын кернеулер осьтік координатаның бойында тұрақталып, ұзындығы шексіз цилиндрдегі кернеулерге сәйкес келетіні көрсетілген.

2 ӘРТҮРЛІ ЖЫЛУ КӨЗДЕРІ ӘСЕРІНДЕГІ СТЕРЖЕНДЕ ПАЙДА БОЛАТЫН ТЕРМО-МЕХАНИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ АЛГОРИТМІ

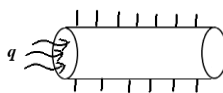
2.1 Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал құру алгоритмі

Шекті ұзындықтағы, көлденең қима ауданы тұрақты болған горизонталь стерженді қарастырайық. Горизонталь ОХ осін солдан оңға қарай бағыттайық. Мұнда ОХ осі стержень осімен дәлме-дәл түседі. Стержень ұзындығы L [см], ал оның көлденең қима ауданы F [см²] болсын. Қоспадан жасалған стержень материалының физика-механикалық қасиеттері: α $\left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ – жылудан кеңею коэффициенті; K_{xx} $\left[\frac{W}{cm \cdot ^{\circ}C} \right]$ – жылу өткізгіштік коэффициенті; E $\left[\frac{кГ}{cm^2} \right]$ – серпімділік модулі. Стержень ұзындықтары бірдей болған үш бөліктен тұрады. Онда әр бөлігінің ұзындығы $l = \frac{L}{3}$ [см] болады. Солдан оңға қарай бірінші бөлікті қараймыз. Бұл бөліктің сол шетіндегі көлденең қима ауданына q $\left[\frac{W}{cm^2} \right]$ жылу ағыны түсіп тұр. Стерженнің бұл бірінші бөлігінің бүйір беті жылу өткізбейтін қабатпен қапталған. Енді берілген стерженнің екінші бөлігін қарастырайық. Бұл бөлік – ішкі бөлік. Бірақ та екінші бөліктің бүйір беті арқылы сыртқы ортамен жылу алмасады. Мұнда жылу алмасу коэффициенті h $\left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$, ал осы бүйір бетті орап тұрған сыртқы ортаның температурасы T_{co} $[^{\circ}C]$. Енді стерженнің соңғы үшінші бөлігін қарайық. Бұл бөлік – стерженнің оң шетіндегі шеткі бөлік. Бұл бөліктің бүйір беті толықтай жылу өткізбейтін қабатпен қапталған. Ал оң шетіндегі көлденең қима ауданына q $\left[\frac{W}{cm^2} \right]$ жылу ағыны түсіп тұр. Бұл мәселенің сызбасы сурет 2.1-те көрсетілген



Сурет 2.1 - Мәселенің сызбасы

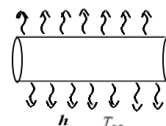
Енді стерженнің бірінші бөлігі өрнектейтін функционалды жазамыз [49]



үшін толық жылу энергиясын

$$I_1 = \int_{F(x=0)} qTds + \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV \quad (2.1)$$

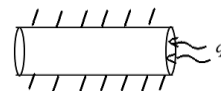
Мұнда $F(x=0)$ – стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданы; V_1 – стерженнің бірінші бөлігінің көлемі. Мұнда екі интегралдың да өлшем бірліктері $[W \cdot ^\circ C]$ болады. Бұл температураның орындаған жұмысы болады. Ары



қарай стерженнің екінші бөлігін қараймыз. Бұл бөлік стерженнің ішкі бөлігі. Бұл бөліктің бүйір беті арқылы сыртқы ортамен жылу алмасады. Сондықтанда бұл бөліктің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалдың көрінісі мынадай болады:

$$I_2 = \int_{S_{66}} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds + \int_{V_2} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV \quad (2.2)$$

Мұнда S_{66} – стерженнің екінші бөлігінің бүйір бетінің ауданы; V_2 – осы екінші бөліктің көлемі. Бұл екі интегралдың да өлшем бірлігі $[W \cdot ^\circ C]$ болады.



Стерженнің соңғы үшінші (шеткі) бөлігін қарайық. Бұл бөліктің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалдың көрінісі мынадай болады [50-53]

$$I_3 = \int_{F(x=L)} qTds + \int_{V_3} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV \quad (2.3)$$

Мұнда $F(x=L)$ – стерженнің оң шетіндегі көлденең қима ауданы; V_3 – стерженнің үшінші бөлігінің көлемі. Мұнда да екі интегралдың өлшем бірліктері $[W \cdot ^\circ C]$ болады. Стерженнің бірінші бөлігі үшін $T_i = T(x=0) = T_1$;

$T_j = T(x = \frac{l}{2}) = T_2$; $T_k = T(x=l) = T_3$. Онда стерженнің бірінші бөлігінің ұзындығы

бойынша жылу таралу заңын былайша өрнектейміз (жергілікті $(0, l)$ жүйесінде):

$$T^{(1)}(x) = \varphi_i(x) \cdot T_1 + \varphi_j(x) \cdot T_2 + \varphi_k(x) \cdot T_3 = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) \cdot T_1 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) \cdot T_2 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \cdot T_3, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.4)$$

Онда стерженнің бірінші бөлігінің ұзындығы бойынша температураның градиенті былай болады:

$$\frac{\partial T^{(1)}(x)}{\partial x} = \left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) T_1 + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) T_2 + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) T_3, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.5)$$

Онда (2.4 – 2.5)-ні (2.1)-ке алып барып қойып, I_1 -функционалдың интегралданған көрінісін табуға ұмтыламыз:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{F(x \neq 0)} qT ds + \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = FqT_1 + \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \\
&= FqT_1 + \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) T_1 + \left(\frac{4l-8l}{l^2} \right) T_2 + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) T_3 \right]^2 dx = \\
&= FqT_1 + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_1^2 - 16T_1T_2 + 2T_1T_3 - 16T_2T_3 + 16T_2^2 + 7T_3^2) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Бұл I_1 – функционалдың интегралданған көрінісі. Мұнда жақшаның ішіндегі өрнекте түйін нүктелер алдындағы коэффициенттердің қосындысы нөлге тең болады, яғни $(7-16+2-16+16+7)=0$. Енді стерженнің екінші бөлігіне өтеміз.

Екінші бөлікте $T_i = T(x=l) = T_3$; $T_j = T(x = \frac{3l}{2}) = T_4$; $T_k = T(x=2l) = T_5$ болады. Онда стерженнің екінші бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралуды былайша өрнектейміз:

$$\begin{aligned}
T^{(2)}(x) &= \varphi_i(x) \cdot T_3 + \varphi_j(x) \cdot T_4 + \varphi_k(x) \cdot T_5 = \\
&= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) \cdot T_3 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) \cdot T_4 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \cdot T_5, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Стерженнің екінші бөлігі ұзындығы бойынша температураның градиентінің өрнегі былай болады:

$$\frac{\partial T^{(2)}(x)}{\partial x} = \left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) T_3 + \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) T_4 + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) T_5, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.8)$$

Енді (2.7-2.8)-ді, стерженнің екінші бөлігі үшін толық жылу энергиясының өрнегі (2.2)-ке қойып, I_2 - нің интегралданған көрінісін табамыз.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{S_{\text{сөз}}} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds + \int_{V_2} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{P \cdot h}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_3 + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_4 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_5 - T_{oc} \right]^2 dx + \\
&+ \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) T_3 + \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) T_4 + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) T_5 \right]^2 dx;
\end{aligned}$$

Мұнда P – стержень көлденең қимасының периметрі.

I_2 - нің интегралданған көрінісі мынадай болады:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\pi hl}{15} (2T_3^2 + 2T_3T_4 - T_3T_5 + 8T_4^2 + 2T_5^2 + 2T_4T_5 - 5T_3T_{co} - \\
&- 20T_4T_{co} - 5T_5T_{co} + 15T_{co}^2) + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_3^2 - 16T_3T_4 + 2T_3T_5 - \\
&- 16T_4T_5 + 16T_4^2 + 7T_5^2); \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Енді стерженнің соңғы үшінші бөлігін қарастырайық. Бұл бөлігінде $T_i = T(x=2l) = T_5$; $T_j = T(x = \frac{5l}{2}) = T_6$; $T_k = T(x=3l) = T_7$. Онда стерженнің үшінші бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралу заңының өрнегі төмендегідей болады:

$$\begin{aligned}
T^{(3)}(x) &= \varphi_i(x) \cdot T_5 + \varphi_j(x) \cdot T_6 + \varphi_k(x) \cdot T_7 = \\
&= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) \cdot T_5 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) \cdot T_6 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \cdot T_7, \quad 0 \leq x \leq l
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Стерженнің үшінші бөлігінің ұзындығы бойынша температура градиентінің өрнегі:

$$\frac{\partial T^{(3)}(x)}{\partial x} = \left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) T_5 + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) T_6 + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) T_7, \quad 0 \leq x \leq l \tag{2.11}$$

Енді (2.10-2.11) өрнектерді (2.3)-ке қойып I_3 - функционалдың интегралданған көрінісін табамыз.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{F(x=L)} qT ds + \int_{V_3} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \\
&= FqT_7 + \frac{FK_{xx}}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) T_5 + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) T_6 + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) T_7 \right]^2 dx = \\
&= FqT_7 + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_5^2 - 16T_5T_6 + 2T_5T_7 - 16T_6T_7 + 16T_6^2 + 7T_7^2);
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Зерттеліп жатқан стержень үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалдың көрінісі мынадай болады:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.13}$$

Біз мәні қазірге белгісіз түйін нүктелердегі T_i , ($i=1 \div 7$) -лердің мәндерін табуымыз керек. T_i - нің табылатын мәндері энергияның сақталу заңын қанағаттандыруы қажет. Онда T_i - лердің мәндерін табу үшін мынадай шешуші теңдеулер жүйесі құрылады:

$$\begin{aligned}
1) \frac{\partial I}{\partial T_1} = 0; &\Rightarrow Fq + \frac{FK_{xx}}{6l}(14T_1 - 16T_2 + 2T_3) = 0, \\
&\text{немесе } 7T_1 - 8T_2 + T_3 = -\frac{3ql}{K_{xx}}; \\
2) \frac{\partial I}{\partial T_2} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l}(-16T_1 + 32T_2 - 16T_3) = 0, \\
&T_1 - 2T_2 + T_3 = 0; \\
3) \frac{\partial I}{\partial T_3} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l}(2T_1 - 16T_2 + 28T_3 - 16T_4 + 2T_5) + \frac{Phl}{30}(4T_3 + 2T_4 - T_5 - 5T_{CO}) = 0, \\
&T_1 - 8T_2 + 14T_3 - 8T_4 + T_5 + \frac{2Phl^2}{5FK_{xx}}T_3 + \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}T_4 - \frac{Phl^2}{10FK_{xx}}T_5 = \frac{Phl^2}{2FK_{xx}}T_{CO}; \\
4) \frac{\partial I}{\partial T_4} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{3l}(-8T_3 - 8T_5 + 16T_4) + \frac{Phl}{30}(2T_3 + 16T_4 + 2T_5 - 20T_{CO}) = 0, \\
&8T_3 - 16T_4 + 8T_5 - \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}T_3 - \frac{8Phl^2}{5FK_{xx}}T_4 - \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}T_5 = -\frac{2Phl^2}{FK_{xx}}T_{CO}; \\
5) \frac{\partial I}{\partial T_5} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{3l}(T_3 - 8T_4 + 14T_5 - 8T_6 + T_7) + \frac{Phl}{30}(-T_3 + 4T_5 + 2T_4 - 5T_{CO}) = 0, \\
&T_3 - 8T_4 + 14T_5 - 8T_6 + T_7 - \frac{Phl^2}{10FK_{xx}}T_3 + \frac{2Phl^2}{5FK_{xx}}T_5 + \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}T_4 = \frac{Phl^2}{2FK_{xx}}T_{CO}; \\
6) \frac{\partial I}{\partial T_6} = 0; &\Rightarrow \frac{FK_{xx}}{3l}(-8T_5 - 8T_7 + 16T_6) = 0, \\
&T_5 - 2T_6 + T_7 = 0; \\
7) \frac{\partial I}{\partial T_7} = 0; &\Rightarrow T_5 - 8T_6 + 7T_7 = -\frac{3ql}{K_{xx}};
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Аздап ықшамдағаннан кейін энергияның сақталу заңын пайдаланып табылған шешуші теңдеулер жүйесі осындай көрініске ие болады:

$$\begin{aligned}
&7T_1 - 8T_2 + T_3 = -\frac{3ql}{K_{xx}}; \\
&T_1 - 2T_2 + T_3 = 0; \\
&T_1 - 8T_2 + \left(14 + \frac{2Phl^2}{5FK_{xx}}\right)T_3 + \left(\frac{Phl^2}{5FK_{xx}} - 8\right)T_4 + \\
&\quad + \left(1 - \frac{Phl^2}{10FK_{xx}}\right)T_5 = \frac{Phl^2}{2FK_{xx}}T_{CO}; \\
&\left(8 - \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}\right)T_3 - \left(16 + \frac{8Phl^2}{5FK_{xx}}\right)T_4 + \left(8 - \frac{Phl^2}{5FK_{xx}}\right)T_5 = -\frac{2Phl^2}{FK_{xx}}T_{CO}; \\
&\left(1 - \frac{Phl^2}{10FK_{xx}}\right)T_3 + \left(\frac{Phl^2}{5FK_{xx}} - 8\right)T_4 + \left(14 + \frac{2Phl^2}{5FK_{xx}}\right)T_5 - \\
&\quad - 8T_6 + T_7 = \frac{Phl^2}{2FK_{xx}}T_{CO}; \\
&T_5 - 2T_6 + T_7 = 0; \\
&T_5 - 8T_6 + 7T_7 = -\frac{3ql}{K_{xx}};
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Осы жүйені шешу арқылы T_i , ($i=1\div 7$) температуралық түйін мәндері анықталады. Содан соң (2.4)-формулаға сүйеніп стерженнің бірінші ($0 \leq x \leq l$) бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығы табылады. Ал стерженнің екінші ($l \leq x \leq 2l$) бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралу заңдылығы (2.7)-формулаға сәйкес табылады. Стерженнің соңғы үшінші ($2l \leq x \leq 3l$) бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралу заңы (2.10)-формуламен өрнектеледі.

[37] -де жазықтық кесінділерінің кинематикалық гипотезасы мен штанганың көлденең қималарының ауырлық центрлерінің қисығына қалыпты перпендикуляр болатын аудандардағы қалыпты кернеулердің кішілігі туралы статистикалық гипотеза негізінде термомастикалық және терморезологиялық қарапайым құрылымдық элементтермен қисық шыбықтардың тепе-теңдік күйін сипаттайтын математикалық модель құрылды. Бір жақты шектеумен бір өлшемді термоэластикалық проблема қарастырылды [38]. Бұл жұмыста жанасу интерфейсі арқылы жылу берумен қыздыру кезіндегі жұқа біртекті өзекшенің деформациясын талдауға арналған есептеу моделі енгізілген. Серпімді кедергімен бір жақты жанасуы бар өзекшенің термоэластикалық проблемасындағы квазистатикалық процестің схемасы қабылданды. Бірнеше есептеу мысалдарында шекті шешімдерді ақырғы элементтер әдісімен іздейді. [39] авторлар композициялық қабық материалының серпімді модулінің температураға тәуелділігін қолданатын және көлемдік жылу көздеріне әсер еткенде ішкі қысым кезіндегі композициялық цилиндрлік қабықтардың беріктігін инженерлік есептеулерде температуралық өрістерді есептеуге мүмкіндік беретін әдісті ұсынады.

2.2 Локалдык жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің термо-механикалық күйін зерттеу алгоритмі

Бұл алгоритмді алдыңғы параграфта қаралған мысалда көрейік. Ол мысалда қаралған стерженнің бірінші ($0 \leq x \leq l$) бөлігінің ұзындығы бойынша жылу таралу заңы көрсетілгендей өрнектеледі:

$$T^{(1)}(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) \cdot T_1 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) \cdot T_2 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) \cdot T_3, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.16)$$

Бұл жылу өрісі әсерінен стерженнің бірінші ($0 \leq x \leq l$) бөлігінің ұзару мөлшері былай табылады:

$$\begin{aligned} \Delta l_{T_1} &= \int_0^l \alpha T^{(1)}(x) dx = \alpha \int_0^l T^{(1)}(x) dx = \\ &= \frac{\alpha}{l^2} \int_0^l \left[(2x^2 - 3lx + l^2) T_1 + (4lx - 4x^2) T_2 + (2x^2 - lx) T_3 \right] dx = \\ &= \frac{\alpha}{l^2} \left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3lx^2}{2} + l^2 x \right) T_1 + \left(2lx^2 - \frac{4x^3}{3} \right) T_2 + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) T_3 \right] \Big|_0^l = \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha}{l^2} \left[\left(\frac{l^3}{6} \right) T_1 + \left(\frac{2l^3}{3} \right) T_2 + \left(\frac{l^3}{6} \right) T_3 \right] =$$

$$= \frac{\alpha l}{6} (T_1 + 4T_2 + T_3) \text{ [см]} \quad (2.17)$$

Дәл осы әдіспен стерженнің екінші бөлігінің ұзару мөлшерін табуға болады.

$$\Delta l_{T_2} = \frac{\alpha l}{6} (T_3 + 4T_4 + T_5) \text{ [см]} \quad (2.18)$$

Енді стерженнің үшінші бөлігінің ұзару мөлшерін де осындай әдіспен анықтаймыз.

$$\Delta l_{T_3} = \frac{\alpha l}{6} (T_5 + 4T_6 + T_7) \text{ [см]} \quad (2.19)$$

Сонда зерттеліп жатқан стерженнің берілген әртүрлі жылу көздері әсерінен ұзару мөлшері мынадай болады:

$$\Delta l_T = \Delta l_{T_1} + \Delta l_{T_2} + \Delta l_{T_3} = \frac{\alpha l}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7) \text{ [см]} \quad (2.20)$$

Мұнда ескерте кететін жайт, стержень жылу көздері әсерінен ұзаруы үшін оның бір шеті мықтап бекітілген, ал екінші шеті бос болуы керек. Жоғарыда табылған ұзару мөлшері осындай жағдайдағы стерженде болады. Егер стерженнің екі шеті де мықтап бекітілсе, онда ол ұзара алмайды. Бірақ әртүрлі жылу көздері әсерінен, жылудан кеңею қасиетінің есебінен стерженнің осі бойынша бағытталған сығушы R [кГ] күш пайда болады. Оның мөлшері Гук заңы және деформацияның сәйкестігі қасиетімен анықталады. Ол мынадай болады:

$$R = -\frac{\Delta l_T EF}{l} = -\frac{EF\alpha}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7) \text{ [кГ]} \quad (2.21)$$

Пайда болған R сығушы күш болғандықтан (2.21)-формулада теріс таңба болады. Яғни, теріс таңба пайда болған R күштің табиғаты сығушы екенін білдіреді. Пайда болған R сығушы күштің әсерінен стерженде үш түрлі деформациялар мен үш түрлі кернеулер пайда болады. Олардың ішіндегі бірінші кернеу термо-серпімділік кернеуі $\sigma \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ болады. Оның мәні Гуктың сәйкес заңынан табылады:

$$\sigma = \frac{R}{F} = -\frac{E\alpha}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7) \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right], 0 \leq x \leq L \quad (2.22)$$

Мұнда σ – стерженнің ұзындығы бойынша тұрақты. Енді сәйкес Гук заңын пайдаланып стержень ұзындығы бойынша термо-серпімділік деформациясының таралу заңдылығын табамыз.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\alpha}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7), 0 \leq x \leq l \quad (2.23)$$

Бұл формуладан көрініп тұрғандай, ε -ның мәні стержень ұзындығы бойынша тұрақты болады екен. Сондай-ақ (2.22-2.23)-формулалардан көрініп тұрғандай ε , σ -лар теріс таңбамен. Бұл жағдай ε , σ -лардың стержень ұзындығы бойынша сығушы характерде болатындығын білдіреді. Енді жылу

физикасының негізгі заңына сәйкес стержень ұзындығы бойынша температуралық деформация $\varepsilon_T(x)$ -тің таралу заңдылығын табамыз.

Мысалы, стерженнің 1-бөлігінің ұзындығы бойынша температуралық деформацияның таралу заңдылығы мынадай болады:

$$\varepsilon_T^{(1)}(x) = -\alpha T^{(1)}(x) = -\frac{\alpha}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_1 + (4lx - 4x^2)I_2 + (2x^2 - lx)I_3], 0 \leq x \leq l \quad (2.24)$$

Стерженнің екінші бөлігінің ұзындығы бойынша температуралық деформацияның таралуы мынадай заңдылықпен өрнектеледі:

$$\varepsilon_T^{(2)}(x) = -\alpha T^{(2)}(x) = -\frac{\alpha}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_3 + (4lx - 4x^2)I_4 + (2x^2 - lx)I_5], 0 \leq x \leq l \quad (2.25)$$

Ал стерженнің үшінші бөлігінің ұзындығы бойынша температуралық деформацияның таралуы былайша өрнектеледі:

$$\varepsilon_T^{(3)}(x) = -\alpha T^{(3)}(x) = -\frac{\alpha}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_5 + (4lx - 4x^2)I_6 + (2x^2 - lx)I_7], 0 \leq x \leq l \quad (2.26)$$

Бұл формуладан көрініп тұрғандай $\varepsilon_T(x)$, стерженнің ұзындығы бойынша параболалық түрде таралған болып, ол ұзындық бойы сығушы характерге ие болады екен. Енді Гуктің сәйкес заңын пайдаланып, стержень ұзындығы бойынша температуралық кернеу, $\sigma_T(x) \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ -тің таралу заңын анықтаймыз.

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(1)}(x) &= E \cdot \varepsilon_T^{(1)}(x) = -\frac{\alpha E}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_1 + (4lx - 4x^2)I_2 + (2x^2 - lx)I_3], 0 \leq x \leq l \\ \sigma^{(2)}(x) &= E \cdot \varepsilon_T^{(2)}(x) = -\frac{\alpha E}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_3 + (4lx - 4x^2)I_4 + (2x^2 - lx)I_5], 0 \leq x \leq l \\ \sigma^{(3)}(x) &= E \cdot \varepsilon_T^{(3)}(x) = -\frac{\alpha E}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)I_5 + (4lx - 4x^2)I_6 + (2x^2 - lx)I_7], 0 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Мұнда $\sigma_T(x)$ -тің табиғаты $\varepsilon_T(x)$ -тің табиғаты сияқты болып, $E \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ - пропорционалдық коэффициенті сияқты болады екен. Негізінде $E \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ - стержень материалының серпімділік модулі. Енді стержень ұзындығы бойынша серпімділік деформациясының таралу заңын табамыз. Серпімділік $\varepsilon_x(x)$ деформациясы термо-серпімділік теориясының негізгі заңына сәйкес табылады.

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)}(x) &= \varepsilon - \varepsilon_T^{(1)}(x) = -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + \\
&+ 2T_5 + 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_1 + \\
&+ (4lx - 4x^2)I_2 + (2x^2 - lx)I_3], 0 \leq x \leq l \\
\varepsilon_x^{(2)}(x) &= \varepsilon - \varepsilon_T^{(2)}(x) = -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + \\
&+ 2T_5 + 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_3 + \\
&+ (4lx - 4x^2)I_4 + (2x^2 - lx)I_5], 0 \leq x \leq l \\
\varepsilon_x^{(3)}(x) &= \varepsilon - \varepsilon_T^{(3)}(x) = -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + \\
&+ 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_5 + (4lx - 4x^2)I_6 + \\
&+ (2x^2 - lx)I_7], 0 \leq x \leq l
\end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Мұнда $\varepsilon_x(x)$ стерженнің бір бөлігінде оң таңбалы, ал қалған бөлігінде теріс таңбалы болады. Яғни, $\varepsilon_x(x)$ стерженнің бір бөлігіндегі созушы, ал қалған бөлігінде сығушы қасиетке ие болады екен. Ары қарай Гуктың сәйкес заңынан серпімділік кернеуі $\sigma_x(x) \left[\frac{\kappa \Gamma}{\text{см}^2} \right]$ -тің стержень ұзындығы бойынша таралу заңын табамыз.

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x^{(1)}(x) &= E \cdot \varepsilon_x^{(1)}(x) = E \left\{ -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + \right. \\
&+ 2T_5 + 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_1 + \\
&+ (4lx - 4x^2)I_2 + (2x^2 - lx)I_3] \left. \right\}, 0 \leq x \leq l \\
\sigma_x^{(2)} &= E \cdot \varepsilon_x^{(2)}(x) = E \left\{ -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + \right. \\
&+ 2T_5 + 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_3 + \\
&+ (4lx - 4x^2)I_4 + (2x^2 - lx)I_5] \left. \right\}, 0 \leq x \leq l \\
\sigma_x^{(3)}(x) &= E \cdot \varepsilon_x^{(3)}(x) = E \left\{ -\frac{\alpha}{6}(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + \right. \\
&+ 4T_6 + T_7) + \frac{\alpha}{l^2}[(2x^2 - 3lx + l^2)I_5 + (4lx - 4x^2)I_6 + \\
&+ (2x^2 - lx)I_7] \left. \right\}, 0 \leq x \leq l
\end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Стержень ұзындығы бойынша $\sigma_x(x)$ -тің таралу табиғаты $\varepsilon_x(x)$ -ке ұқсас болып, мұнда E пропорционалдық коэффициентінің рөлін атқарады [54-56].

Енді стерженнің ұзындығы бойынша орын ауыстырудың таралу заңын табамыз. Ол үшін стерженнің серпімділік деформациясының потенциал энергиясын өрнектейтін функционалды жазамыз.

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} \varepsilon_x(x) dv - \int_V \alpha E T(x) \varepsilon_x(x) dV \quad (2.30)$$

Мұнда серпімділік деформациясымен орын ауыстыру арасындағы байланысты ескереміз.

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.31)$$

Сондай-ақ Гук заңына сәйкес

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (2.32)$$

Онда

$$\int_V \frac{\sigma_x}{2} \varepsilon_x dv = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV = \frac{EF}{2} \int_0^l \varepsilon_x^2 dx = \frac{EF}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.33)$$

Стерженнің бірінші бөлігінің ұзындығы бойынша орын ауыстырудың таралу заңын квадратты сплайн функциялар арқылы өрнектейміз.

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= \varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \varphi_3(x)u_3 = \\ &= \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_1 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_2 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_3, \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (2.34)$$

Мұнда $u_1 = u(x=0)$; $u_2 = u\left(x = \frac{l}{2}\right)$; $u_3 = u(x=l)$. Онда стерженнің бірінші бөлігінің ұзындығы бойынша серпімділік деформациясының өрнегін былай жазуға болады:

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) u_1 + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) u_2 + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) u_3, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.35)$$

Онда (2.30, 2.33, 2.35) өрнектерін пайдаланып стерженнің бірінші бөлігінің серпімділік деформациясының потенциал энергиясының өрнегін осылай жаза аламыз:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{EF}{2l^4} \int_0^l [(4x - 3l)u_1 + (4l - 8x)u_2 + (4x - l)u_3]^2 dx - \\ &- \frac{\alpha EF}{l^4} \int_0^l [(2x^2 - 3lx + l^2)I_1 + (4lx - 4x^2)I_2 + (2x^2 - lx)I_3] \times \\ &\times [(4x - 3l)u_1 + (4l - 8x)u_2 + (4x - l)u_3] dx = \\ &= \frac{EF}{2l^4} \left\{ \left[\frac{16x^3}{3} - 12lx^2 + 9l^2x \right] u_1^2 + \left[16l^2x - 32lx^2 + \frac{64x^3}{3} \right] u_2^2 + \right. \\ &+ \left[\frac{16x^3}{3} - 4lx^2 + l^2x \right] u_3^2 + \left[40lx^2 - \frac{64x^3}{3} - 24l^2x \right] u_1u_2 + \\ &+ \left[\frac{32x^3}{3} - 16lx^2 + 6l^2x \right] u_1u_3 + \left[24lx^2 - 8l^2x - \frac{64x^3}{3} \right] u_2u_3 \left. \right\} - \\ &- \frac{\alpha EF}{l^4} \left[\left(2x^4 - 6lx^3 + \frac{13l^2x^2}{2} - 3l^3x \right) I_1 u_1 + \right. \\ &+ \left(\frac{32lx^3}{3} - 4x^4 - 10l^2x^2 + 4l^3x \right) I_1 u_2 + \\ &+ \left(2x^4 - \frac{14lx^3}{3} + \frac{7l^2x^2}{2} - l^3x \right) I_1 u_3 + \left(\frac{28lx^3}{3} - 6l^2x^2 - 4x^4 \right) I_2 u_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (8l^2x^2 - 16lx^3 + 8x^4)T_2u_2 + \left(\frac{20lx^3}{3} - 2l^2x^2 - 4x^4 \right) T_2u_3 + \\
& + \left(2x^4 - \frac{10lx^3}{3} + \frac{3l^2x^2}{2} \right) T_3u_1 + \left(\frac{16lx^3}{3} - 4x^4 - 2l^2x^2 \right) T_3u_2 + \\
& + \left(2x^4 - 2lx^3 + \frac{l^2x^2}{2} \right) T_3u_3 \Big|_0^l = \frac{EF}{2l} \left[\frac{7}{3}u_1^2 + \frac{16}{3}u_2^2 + \frac{7}{3}u_3^2 - \frac{16}{3}u_1u_2 + \right. \\
& + \frac{2}{3}u_1u_3 - \frac{16}{3}u_2u_3 \Big] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_1u_1 + \frac{2}{3}T_1u_2 - \frac{1}{6}T_1u_3 - \frac{2}{3}T_2u_1 + \right. \\
& + \frac{2}{3}T_2u_3 + \frac{1}{6}T_3u_1 - \frac{2}{3}T_3u_2 + \frac{1}{2}T_3u_3 \Big]; \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Дәл осылай стерженнің екінші бөлігі үшін серпімділік деформациясының потенциал энергиясын өрнектейтін функционалдың интегралданған көрінісін анықтаймыз.

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \frac{EF}{2l^4} \int_0^l [(4x-3l)u_3 + (4l-8x)u_4 + (4x-l)u_5]^2 dx - \\
& - \frac{\alpha EF}{l^4} \int_0^l (2x^2 - 3lx + l^2)T_3 + (4lx - 4x^2)T_4 + (2x^2 - lx)T_5 \cdot [(4x-3l)u_3 + \\
& + (4l-8x)u_4 + (4x-l)u_5] dx = \frac{EF}{2l^4} \left\{ \left[\frac{16x^3}{3} - 12lx^2 + 9l^2x \right] u_3^2 + \right. \\
& + \left(16l^2x - 32lx^2 + \frac{64x^3}{3} \right) u_4^2 + \left(\frac{16x^3}{3} - 4lx^2 + l^2x \right) u_5^2 + \\
& + \left(40lx^2 - \frac{64x^3}{3} - 24l^2x \right) u_3u_4 + \left(\frac{32x^3}{3} - 16lx^2 + 6l^2x \right) u_3u_5 + \\
& + \left(24lx^2 - 8l^2x - \frac{64x^3}{3} \right) u_4u_5 \Big\} - \frac{\alpha EF}{l^4} \left[\left(2x^4 - 6lx^3 + \frac{13l^2x^2}{2} - 3l^3x \right) T_3u_3 + \right. \\
& + \left(\frac{32lx^3}{3} - 4x^4 - 10l^2x^2 + 4l^3x \right) T_3u_4 + \left(2x^4 - \frac{14lx^3}{3} + \frac{7l^2x^2}{2} - l^3x \right) T_3u_5 + \\
& + \left(\frac{28lx^3}{3} - 6l^2x^2 - 4x^4 \right) T_4u_3 + (8l^2x^2 - 16lx^3 + 8x^4)T_4u_4 + \\
& + \left(\frac{20lx^3}{3} - 2l^2x^2 - 4x^4 \right) T_4u_5 + \left(2x^4 - \frac{10lx^3}{3} + \frac{3l^2x^2}{2} \right) T_5u_3 + \\
& + \left(\frac{16lx^3}{3} - 4x^4 - 2l^2x^2 \right) T_5u_4 + \left(2x^4 - 2lx^2 + \frac{l^2x^2}{2} \right) T_5u_5 \Big] \Big|_0^l = \\
& = \frac{EF}{6l} [7u_3^2 + 16u_4^2 + 7u_5^2 - 16u_3u_4 + 2u_3u_5 - 16u_4u_5] - \\
& - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_3u_3 + \frac{2}{3}T_3u_4 - \frac{1}{6}T_3u_5 - \frac{2}{3}T_4u_3 + \frac{2}{3}T_4u_5 + \frac{1}{6}T_5u_3 - \right. \\
& \left. - \frac{2}{3}T_5u_4 + \frac{1}{2}T_5u_5 \right] \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Енді стерженнің ең соңғы үшінші бөлігі үшін серпімділік деформациясының потенциал энергиясының интегралданған түрін жазамыз.

$$\begin{aligned}
\Pi_3 = & \frac{EF}{2l^4} \int_0^l [(4x-3l)u_5 + (4l-8x)u_6 + (4x-l)u_7]^2 dx - \\
& - \frac{\alpha EF}{l^4} \int_0^l (2x^2 - 3lx + l^2)T_5 + (4lx - 4x^2)T_6 + (2x^2 - lx)T_7] \times \\
& \times [(4x-3l)u_5 + (4l-8x)u_6 + (4x-l)T_7] dx = \frac{EF}{2l^4} \left\{ \left[\frac{16x^3}{3} - \right. \right. \\
& - 12lx^2 + 9l^2x)u_5^2 + \left(16l^2x - 32lx^2 + \frac{64x^3}{3} \right) u_6^2 + \left(\frac{16x^3}{3} - 4lx^2 + l^2x \right) u_7^2 + \\
& + \left(40lx^2 - \frac{64x^3}{3} - 24l^2x \right) u_5u_6 + \left(\frac{32x^3}{3} - 16lx^2 + 6l^2x \right) u_5u_7 + \\
& + \left(24lx^2 - 8l^2x - \frac{64x^3}{3} \right) u_6u_7 \left. \right\} - \frac{\alpha EF}{l^4} \left[(2x^4 - 6lx^3 + \frac{13l^2x^2}{2} - \right. \\
& - 3l^3x)T_5u_5 + \left(\frac{32lx^3}{3} - 4x^4 - 10l^2x^2 + 4l^3x \right) T_5u_6 + (2x^4 - \frac{14lx^3}{3} + \\
& + \frac{7l^2x^2}{2} - l^3x)T_5u_7 + \left(\frac{28lx^3}{3} - 6l^2x^2 - 4x^4 \right) T_6u_5 + \\
& + (8l^2x^2 - 16lx^3 + 8x^4)T_6u_6 + \left(\frac{20lx^3}{3} - 2l^2x^2 - 4x^4 \right) T_6u_7 + \\
& + \left(2x^4 - \frac{10lx^3}{3} + \frac{3l^2x^2}{2} \right) T_7u_5 + \left(\frac{16lx^3}{3} - 4x^4 - 2l^2x^2 \right) T_7u_6 + \\
& + \left(2x^4 - 2lx^2 + \frac{l^2x^2}{2} \right) T_7u_7 \left. \right] \Big|_0^l = \frac{EF}{6l} [7u_5^2 + 16u_6^2 + 7u_7^2 - 16u_5u_6 + \\
& + 2u_5u_7 - 16u_6u_7] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_5u_5 + \frac{2}{3}T_5u_6 - \frac{1}{6}T_5u_7 - \frac{2}{3}T_6u_5 + \right. \\
& + \frac{2}{3}T_6u_7 + \frac{1}{6}T_7u_5 - \frac{2}{3}T_7u_6 + \left. \frac{1}{2}T_7u_7 \right] \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Онда зерттеліп жатқан стержень үшін серпімділік деформациясының потенциал энергиясының интегралданған көрінісі мынадай болады:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \tag{2.39}$$

Зерттеліп жатқан стерженнің екі шеті мықтап бекітілгендіктен $u_1 = u(x=0) = u_7 = u(x=L) = 0$ болады. Онда стержень ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңын табу үшін u_2, u_3, u_4, u_5 және u_6 -ның мәндерін табу керек. Бірақ u_i ($i = 2 \div 6$)-лердің мәндері энергияның сақталу заңын орындаулары қажет. Онда мынадай шешуші теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left. \begin{aligned}
1) \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{2l} \left(\frac{32}{3} u_2 - \frac{16}{3} u_3 \right) - \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_1 - \frac{2}{3} T_3 \right) = 0; \\
2) \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{2l} \left(\frac{28}{3} u_3 - \frac{16}{3} u_2 - \frac{16}{3} u_4 + \frac{2}{3} u_5 \right) - \\
&- \alpha EF \left(-\frac{1}{6} T_1 + \frac{2}{3} T_2 + \frac{1}{2} T_3 - \frac{1}{2} T_3 - \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{6} T_5 \right) = 0; \\
3) \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (32u_4 - 16u_3 - 16u_5) - \\
&- \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_3 - \frac{2}{3} T_5 \right) = 0; \\
4) \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (28u_5 + 2u_3 - 16u_4 - 16u_6 + 2u_7) - \\
&- \alpha EF \left(-\frac{1}{6} T_3 + \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{2} T_5 - \frac{1}{2} T_5 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} T_6 + \frac{1}{6} T_7 \right) = 0; \\
5) \frac{\partial \Pi}{\partial u_6} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (32u_6 - 16u_5 - 16u_7) - \\
&- \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_5 - \frac{2}{3} T_7 \right) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{2.40}$$

Аздап ықшамдалған соң бұл жүйені былайша жазуға болады:

$$\left. \begin{aligned}
2u_2 - u_3 &= \frac{\alpha l}{4} (T_1 - T_3); \\
-8u_2 + 14u_3 - 8u_4 + u_5 &= -\frac{1}{6} T_1 + \frac{2}{3} T_2 - \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{6} T_5 \\
-u_3 + 2u_4 - u_5 &= \frac{\alpha l}{4} (T_3 - T_5) \\
u_3 - 8u_4 + 14u_5 - 8u_6 + u_7 &= 3\alpha l \left(-\frac{T_3}{6} + \frac{2T_4}{3} - \frac{2T_6}{3} + \frac{1}{6} T_7 \right) \\
-u_5 + 2u_6 - u_7 &= \frac{\alpha l}{4} (T_5 - T_7)
\end{aligned} \right\} \tag{2.41}$$

Алынған (2.41)- жүйені шешіп, u_i ($i = 2 \div 6$)-лардың мәндері анықталады. Содан соң стерженнің бірінші бөлігі бойынша орын ауыстыру заңы анықталады.

$$u^{(1)}(x) = \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_2 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_3, \quad 0 \leq x \leq l \tag{2.42}$$

Стерженнің екінші бөлігінің ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңы былайша анықталады:

$$u^{(2)}(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_3 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_4 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_5, \quad 0 \leq x \leq l \tag{2.43}$$

Стерженнің соңғы үшінші бөлігінің ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңы мына формуламен өрнектеледі:

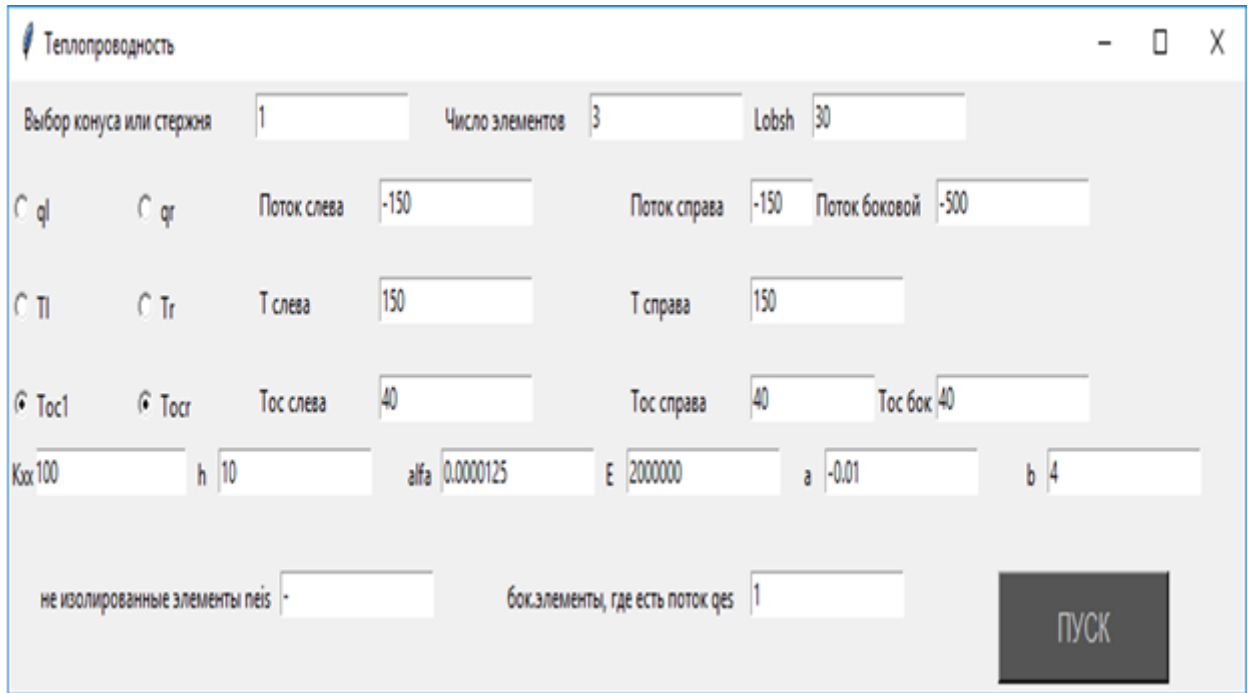
$$u^{(3)}(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_5 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_6, 0 \leq x \leq l. \quad (2.44)$$

Кернеулердегі серпімділік теориясының температуралық есебінің вариациялық принципінің негіздері келтірілген [40]. Бөлшектер мен құрылымдық элементтерді беріктікке есептеу кезінде есептің вариациялық тұжырымы қолданылады. Мақалада вариациялық принцип ұсынылған, оның Эйлер тендеулері кернеулердегі термоэластикалық тендеулер болып табылады. Жай ғана байланысқан және көбейтілген байланысқан, оның бетіне жылу көздері әсер ететін призматикалық өзекше қарастырылды [41]. Композициялық шыбықтар шекараларының пішінін оңтайландыру мәселесін шешуге қажетті функционалды бұралу қаттылығының сезімталдық коэффициенттерін шығарудың ерекшелігі - бұқаралық ақпарат құралдары арасында ішкі интерфейсін болуы, бұл оңтайландыру мәселелерінің кең ауқымын қоюға мүмкіндік береді.

Екі қабатты цилиндрдің кернеулік-деформациялық күйін зерттеудің сандық алгоритмі ұсынылды [42]. Алгоритм эластопластикалық деформация теориясының байланысына негізделген. Бірнеше мәселе шешілді. Алынған сандық нәтижелер талданады. Олардың кейбіреулері график түрінде берілген. [43] -де сыртқы бет бойымен дайындамаға жанасатын және ішінен сумен салқындатылатын қуыс цилиндрлік соққының термоэластикалық кернеулері туралы мәселе қарастырылған. Шеткі ұзындықтағы жіңішке бөгде таяқшаны қамтитын серпімді кеңістіктегі кернеулердің осимметриялық термоэластикалық есебі зерттелген. Дөңгелек цилиндрлік штанганың тұрақты температурадағы жағдайы қарастырылады. Ерікті түрде берілген температуралық өрістің және көлденең қиманың штангасының жағдайы зерттеледі, ал ақырғы ұзындықты тар конустық қосқанда, есептердің аналитикалық шешімі қатар түрінде кездеседі. Дифференциалды геометриядан қажетті ақпарат, қабылданған болжамдар тұжырымдалады, кинематикалық теңдеулер, тепе-теңдік теңдеулер және шекаралық шарттар құрылады, олар ерікті қисық шыбықтар үшін, оның ішінде тікбұрышты көлденең қималар үшін жарамды [45]. Сондықтан осы құрылымдық элементтердің толық математикалық моделін алу үшін физикалық теңдеу құру қажет болады. Осындай теңдеулерді нақты стержендер құрудың мысалдары келтірілген. Берілген материал сипаттамаларының құрылымдық параметрлерге тәуелділігі зерттеледі. Құрылымдар штрих элементтерінен есептеледі. Тік бұрышты және тіктөртбұрышты секциялардың ламинатталған стержендерінің термовискугельдігінің теңдеулері құрылды. Нәтижесінде берілген термовисельселефикалық тиімді сипаттамалар үшін формулалар алынады. [46] жылы математикалық модель мен сандық алгоритм құрудың, локальді вариация әдісін қолдана отырып, термоэластикалық және термоэластопластикалық екі өлшемді есептерді шешудің кейбір ерекшеліктері қарастырылған. Термоэластопластикалық мәселелерді шешкен кезде локальді вариация әдісі икемділіктің айнымалы параметрлері әдісімен бірге қолданылады. Ұсынылған тәсілдің ерекшелігі деформация мен кернеу

тензорларының компоненттерін анықтау сатысында ақырлы элементтер технологияларын қолдану болып табылады. Өзірленген есептеу алгоритмі ішкі қысым мен температура өрісінің әсерінен құбырға арналған термоэластопластика мәселесін шешу мысалында тексерілді.

2.3 Компьютерлік бағдарламалар мен интерфейстер



Сурет 2.2 - Бағдарламалық жасақтама сипаттамасы

Python бағдарламалау тілінде стерженнің ұзындығы шектеулі және көлденең қимасының тұрақты термомеханикалық күйінің компьютерлік-математикалық моделіне арналған бағдарламалық жасақтама жасалған. Бұл бағдарламалық жасақтамада «Теплопроводность» деп аталатын интерфейс бар. Бірінші жолда үш мәтін өрісі берілген.

Бірінші мәтіндік өріс «стержен» деп аталады. Бұл мәтіндік өріске «1» саны енгізіледі, оның мәні зерттелетін стерженнің көлденең қимасы болатындығында. Бұл жолдағы екінші мәтіндік өріс «число элементов». Мұнда стерженде зерттелетін дискретті элементтердің санын енгізесіз. Стерженьді дискретизациялау біртекті жылу көзі немесе жылу оқшаулау әр дискреттік өзектің бүйір бетінде болатындай етіп жүзеге асырылады. Үшінші (соңғы) терезеде интерфейстің бірінші жолында «Labsh» деп аталады. Зерттелетін стерженнің ұзындығын осы жерге сантиметрмен енгіземіз.

Интерфейстің екінші жолында үш мәтіндік өріс бар. Бірінші мәтіндік өріс «Поток слева» деп аталады. Бұл зерттелетін стерженнің сол жақ ұшының

көлденең қимасының ауданына жылу ағыны $q_n \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ түскен кезде пайда болады. Бұл жағдайда көрсетілген жылу ағынының мәні интерфейстің екінші жолының бірінші мәтіндік өрісіне енгізіледі. Бұл жағдайда берілген жылу ағынының белгісі «-» (минус) болады, егер бұл жерде жылу ағыны көрінсе. Егер жылу ағыны осы аймақтан шығарылса, онда берілген жылу ағынының белгісі «+» (плюс) болады. Интерфейстің екінші жолының екінші мәтіндік өрісі «поток справа» деп аталады. Бұл мәтіндік өріс оң жақ ұшының көлденең қимасына жылу ағыны $q_n \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ қолданылған жағдайда толтырылады. Интерфейстің үшінші мәтіндік өрісі «поток боковой» деп аталады. Бұл мәтіндік өріс стерженнің бүйір бетіне жылулық $q_\delta \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ тұрақты интенсивтілік әсер етсе толтырылады.

Интерфейстің үшінші жолы екі мәтіндік өрістен тұрады. Бірінші мәтіндік өріс «Т слева» деп аталады. Бұл дегеніміз, егер зерттеліп жатқан стерженнің сол жағында берілген температураның мәні $[^{\circ}C]$ енгізіледі. Интерфейстің үшінші жолының екінші мәтіндік өрісі «Т справа» деп аталады. Егер температура оң жақта орнатылса, онда оның мәндері осы мәтіндік өріске $[^{\circ}C]$ енгізіледі. Жасалған интерфейсстің төртінші жолында үш мәтіндік өріс бар. Бірінші мәтіндік өріс « T_{oc} слева» деп аталады. Егер стерженнің сол жақ ұшының көлденең қимасы арқылы осы аймақты қоршаған ортамен жылу алмасу орын алса, онда осы ортаның температуралық мәні $[^{\circ}C]$ осы мәтіндік өріске енгізіледі. Интерфейстің осы жолының екінші мәтіндік өрісі « T_{oc} справа» деп аталады. Егер осы аймақты қоршаған ортамен жылу алмасу зерттелетін стерженнің оң жақ ұшының көлденең қимасының ауданы арқылы жүрсе, онда осы мәтіндік өрістің ішіне осы орта температурасының мәні $[^{\circ}C]$ енгізіледі. Соңында, интерфейсстің осы жолының соңғы мәтіндік өрісі « T_{oc} бок» деп аталады. Егер осы аймақты қоршаған ортамен жылу алмасу зерттелетін стерженнің бүйір бетінің ауданы арқылы жүрсе, онда осы мәтіндік өрістің ішіне осы ортаның температурасының мәні $[^{\circ}C]$ енгізіледі.

Интерфейстің бесінші жолында бізге керек төрт мәтіндік өріс орналасқан. Бірінші мәтіндік өріс « K_{xx} » деп аталады. Мұнда стержен материалының жылу өткізгіштік коэффициентінің мәндері $\left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ енгізілген. Келесі мәтіндік өріс « h » деп аталады. Бұл мәтіндік өріске жылу алмасу коэффициентінің мәндері $\left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$ енгізіледі. Интерфейстің бесінші жолының үшінші мәтіндік өрісі « α » деп аталады. Бұл жерде стержен материалының сызықтық кеңею коэффициентінің мәндері $\left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ енгізіледі. Интерфейстің бесінші жолының

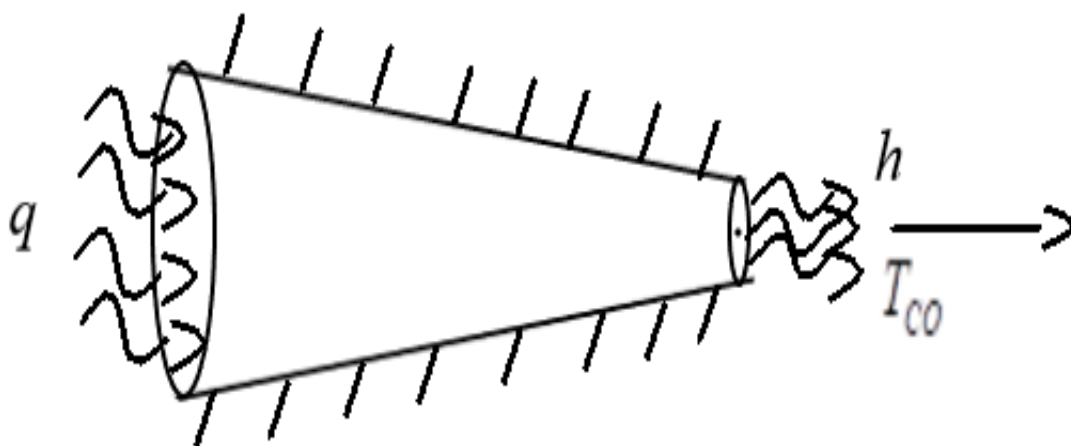
төртінші мәтіндік өрісі «Е» деп аталады. Бұл жерде стержен материалының серпімді модулінің мәндері $\left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ енгізіледі. Осы жолдың бесінші және алтыншы мәтіндік өрістері «а» және «b» деп аталады. Бұл параметрлер осы интерфейсті дамыту үшін қажет.

Интерфейстің соңғы жолында бірінші мәтіндік өріс «peis» деп аталады, оған бүйір беттері жылу оқшауланбаған дискретті элементтердің нөмірлерін енгіземіз. Осы жолдағы екінші мәтіндік өріс «qes» деп аталады. Бұл мәтіндік өріске олардың бүйір беттеріне тұрақты қарқындылықтағы жылу ағындары берілген дискретті элементтердің нөмірлері енгізіледі.

3 КӨЛДЕНЕҢ ҚИМА СТЕРЖЕНІНІҢ ҚАЛЫПТАСҚАН ТЕРМО-МЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙІН МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

3.1 Локалдык жылу ағыны, жылу изоляциясы мен жылу алмасу кезіндегі айнымалы қима стерженінде температураның таралу аймағын модельдеудің энергетикалық әдісі

Шекті ұзындықтағы горизонталь стерженді қарайық. ОХ осін стерженнің осі бойынша солдан оңға қарай жіберейік. Стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданы, оң шетіндегісінен үлкен болсын, яғни $F(x=0) > F(x=l)$. Мұнда стерженнің ұзындығы l [см] болсын. Солдан оңға қарай стержень көлденең қима радиусы $r = ax + b$, $a, b = const$ көрінісінде өзгерсін. Мұнда стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданының радиусы $r(x=0) = a \cdot 0 + b = b$ [см]. Ал стерженнің оң шетіндегі көлденең қима ауданының радиусы $r(x=l) = a \cdot l + b < b$ [см] болады. Онда зерттеліп жатқан көлденең қима ауданы өзгеруші горизонталь стержень жасаушысы тура сызық болған қиық конус тәрізді болады. Бұл конустың жасаушысы түзу сызық болады. Зерттеліп жатқан стерженнің көлденең қима ауданы $F(x) = \pi r^2 = \pi(ax + b)^2 = \pi(a^2 x^2 + 2abx + b^2)$ көрінісінде ұзындығы бойынша өзгереді. Бұл стерженнің бүйір беті оның ұзындығы бойынша жылу өткізбейтін қабатпен қапталған болсын. Оның сол жақ шетіндегі көлденең қима ауданына $q \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ жылу ағыны түсіп тұрсын. Стерженнің сол жақ шетіндегі көлденең қима ауданы арқылы сыртқы ортамен жылу алмассын. Мұнда сыртқы ортаның температурасы T_{co} [$^{\circ}C$], ал жылу алмасу коэффициенті $h \left[\frac{W}{cm^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$ болсын. Бұл мәселенің сызбасы сурет 3.1-да көрсетілген.



Сурет 3.1 - Мәселенің сызбасы

Бұл мәселеде стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңын жергілікті координата жүйесінде екінші дәрежелі сплайн функциялар арқылы өрнектейік:

$$T(x) = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k = \\ = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1)$$

Мұнда $T_i = T(x=0)$; $T_j = T(x=\frac{l}{2})$; $T_k = T(x=l)$.

Қазірге T_i , T_j , T_k -лардың мәндері анықталмаған. Енді зерттеліп жатқан стерженге әсер етіп тұрған жылу көздерін есепке ала отырып толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалды құрамыз [57-60].

$$I = \int_{F(x=0)} q \cdot T ds + \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds \quad (3.2)$$

Мұнда $F(x=0)$, берілген стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданы; V – стерженнің көлемі; $F(x=l)$ – стерженнің оң шетіндегі көлденең қима ауданы. (3.2) формулада I - функционалдың өрнегіндегі әрбір интеграл мүшелерінің өлшем бірліктері $[W \cdot ^\circ C]$ болып, бұл температураның орындаған жұмысы болады. Жоғарыдағы (3.1)-өрнектен стержень ұзындығы бойынша температураның градиентін табуға болады.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

Енді I - функционалдың (3.2)-өрнегіндегі бірінші мүшесін қарайық:

$$I_1 = \int_{F(x=0)} q T ds = \pi b^2 q T_i \quad (3.4)$$

Сондай-ақ I -функционалдың екінші мүшесін интегралдайық:

$$I_2 = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{\pi K_{xx}}{2} \int_0^l (ax + b)^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \\ = \frac{\pi K_{xx}}{2} \int_0^l (a^2 x^2 + 2abx + b^2) \cdot \left[\left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) T_j + \right. \\ \left. + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) T_k \right]^2 dx = \frac{\pi K_{xx}}{2l^4} \int_0^l (a^2 x^2 + 2abx + b^2) \left[(16x^2 - 24lx + 9l^2) T_i^2 + \right. \\ \left. + 2(40lx - 32x^2 - 12l^2) T_i T_j + 2(16x^2 - 16lx + 3l^2) T_i T_k + \right. \\ \left. + 2(24lx - 4l^2 - 32x^2) T_j T_k + (16l^2 - 64lx + 64x^2) T_j^2 + \right. \\ \left. + (16x^2 - 8lx + l^2) T_k^2 \right] dx = \frac{\pi K_{xx}}{2l^4} \int_0^l [(16a^2 x^4 - 24a^2 l x^3 + 9a^2 l^2 x^2 + \\ + 32abx^3 - 48abl^2 x + 18abl^2 x + 16b^2 x^2 - 24b^2 l x + 9b^2 l^2) T_i^2 + \\ + (80a^2 l x^3 - 64a^2 x^4 - 24a^2 l^2 x^2 + 160abl^2 x - 128abx^3 - \\ - 48abl^2 x + 80b^2 l x - 64b^2 x^2 - 24b^2 l^2) T_i T_j + (32a^2 x^4 - 32a^2 l x^3 + \\ + 6a^2 l^2 x^2 + 64abx^3 - 64abl^2 x + 12abl^2 x + 32b^2 x^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -32b^2lx + 6b^2l^2)T_iT_k + (48a^2lx^3 - 8a^2l^2x^2 - 64a^2x^4 + 96ablx^2 - \\
& -16abl^2x - 128abx^3 + 48b^2lx - 8b^2l^2 - 64b^2x^2)T_jT_k + \\
& + (16a^2l^2x^2 - 64a^2lx^3 + 64a^2x^4 + 32abl^2x - 128ablx^2 + \\
& + 128abx^3 + 16b^2l^2 - 64b^2lx + 64b^2x^2)T_j^2 + \\
& + (16a^2x^4 - 8a^2lx^3 + a^2l^2x^2 + 32abx^3 - 16ablx^2 + 2abl^2x + \\
& + 16b^2x^2 - 8b^2lx + b^2l^2)T_k^2]dx = \frac{\pi K_{xx}}{2l^4} \left[\left(\frac{16a^2x^5}{5} - 6a^2lx^4 + 3a^2l^2x^3 + \right. \right. \\
& + 8abx^4 - 16ablx^3 + 9abl^2x^2 + \frac{16b^2x^3}{3} - 12b^2lx^2 + 9b^2l^2x)T_i^2 + \\
& + (20a^2lx^4 - \frac{64a^2x^5}{5} - 8a^2l^2x^3 + \frac{160ablx^3}{3} - 32abx^4 - 24abl^2x^2 + \\
& + 40b^2lx^2 - \frac{64b^2x^3}{3} - 24b^2l^2x)T_iT_j + \left(\frac{32a^2x^5}{5} - 8a^2lx^4 + \right. \\
& + 2a^2l^2x^3 + 16abx^4 - \frac{64ablx^3}{3} + 6abl^2x^2 + \frac{32b^2x^3}{3} - \\
& - 16b^2lx^2 + 6b^2l^2x)T_iT_k + (12a^2lx^4 - \frac{8a^2l^2x^3}{3} - \frac{64a^2x^5}{5} + \\
& + 32ablx^3 - 8abl^2x^2 - 32abx^4 + 24b^2lx^2 - 8b^2l^2x - \frac{64b^2x^3}{3})T_jT_k + \\
& + \left(\frac{16a^2l^2x^3}{3} - 16a^2lx^4 + \frac{64a^2x^5}{5} + 16abl^2x^2 - \frac{128ablx^3}{3} + \right. \\
& + 32abx^4 + 16b^2l^2x - 32b^2lx^2 + \frac{64b^2x^3}{3})T_j^2 + \left(\frac{16a^2x^5}{5} - 2a^2lx^4 + \right. \\
& + \frac{a^2l^2x^3}{3} + 8abx^4 - \frac{16ablx^3}{3} + abl^2x^2 + \frac{16b^2x^3}{3} - 4b^2lx^2 + b^2l^2x)T_k^2 \Big] \Big|_0^l = \\
& = \frac{\pi K_{xx}}{2l^4} \left[\left(\frac{a^2l^5}{5} + abl^4 + \frac{7b^2l^3}{3} \right) T_i^2 + \left(-\frac{4a^2l^5}{5} - \frac{8abl^4}{3} - \frac{16b^2l^3}{3} \right) T_iT_j + \right. \\
& + \left(\frac{2a^2l^5}{5} + \frac{2abl^4}{3} + \frac{2b^2l^3}{3} \right) T_iT_k + \left(-\frac{52a^2l^5}{15} - 8abl^4 - \frac{16b^2l^3}{3} \right) T_jT_k + \\
& + \left(\frac{32a^2l^5}{15} + \frac{16abl^4}{3} + \frac{16b^2l^3}{3} \right) T_j^2 + \left(\frac{23a^2l^5}{15} + \frac{11abl^4}{3} + \frac{7b^2l^3}{3} \right) T_k^2 \Big] = \\
& = \frac{\pi K_{xx}}{2l} \left[\left(\frac{a^2l^2}{5} + abl + \frac{7b^2}{3} \right) T_i^2 - \left(\frac{4a^2l^2}{5} + \frac{8abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) T_iT_j + \right. \\
& + \left(\frac{2a^2l^2}{5} + \frac{2abl}{3} + \frac{2b^2}{3} \right) T_iT_k - \left(\frac{52a^2l^2}{15} + 8abl + \frac{16b^2}{3} \right) T_jT_k + \\
& + \left(\frac{32a^2l^2}{15} + \frac{16abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) T_j^2 + \left(\frac{23a^2l^2}{15} + \frac{11abl}{3} + \frac{7b^2}{3} \right) T_k^2 \Big] \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Соңғы алынған (3.5)-формула – I_3 -тің интегралданған көрінісі. Мұнда мынадай заңдылықты көреміз: түйін нүктелердегі температуралардың алдындағы

коэффициенттердің қосындысы нөлге тең болады екен. Мысалы,

$$\left(\frac{a^2l^2}{5} - \frac{4a^2l^2}{5} + \frac{2a^2l^2}{5} - \frac{52a^2l^2}{15} + \frac{32a^2l^2}{15} + \frac{23a^2l^2}{15}\right) = 0;$$

$$\left(abl - \frac{8abl}{3} + \frac{2abl}{3} - 8abl + \frac{16abl}{3} + \frac{11abl}{3}\right) = 0; \text{ және } \left(\frac{7b^2}{3} - \frac{16b^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{16b^2}{3} + \frac{16b^2}{3} + \frac{7b^2}{3}\right) = 0$$

Енді (3.2)-формуладағы I функционалдың өрнегінің ең соңғы интегралын есептейміз.

$$I_3 = \int_{F(x=l)} \frac{h}{2} (T - T_{CO})^2 ds = \frac{F(x=l)h}{2} (T_k - T_{CO})^2 =$$

$$= \frac{\pi(al+b)^2 h}{2} (T_k - T_{CO})^2 \quad (3.6)$$

Ары қарай I_1 , I_2 және I_3 -тердің өрнектерін пайдаланып, жалпы стержень үшін толық жылу энергиясын өрнектейтін I - функционалының интегралданған күйін табамыз:

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.7)$$

Енді T_i , T_j және T_k -лардың мәндерін табуға кірісеміз. Олардың табылатын мәндері, әрине, энергияның сақталу заңын қанағаттандырулары керек [61]. Сондықтан да олар төмендегі теңдеулер жүйесін қанағаттандырулары қажет.

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0; &\Rightarrow \pi b^2 q + \frac{\pi K_{xx}}{2l} \left[2 \left(\frac{a^2l^2}{5} + abl + \frac{7b^2}{3} \right) T_i - \right. \\ &\left. - \left(\frac{4a^2l^2}{5} + \frac{8abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) T_j + \left(\frac{2a^2l^2}{5} + \frac{2abl}{3} + \frac{2b^2}{3} \right) T_k \right] = 0; \\ 2) \frac{\partial I}{\partial T_j} = 0; &\Rightarrow \frac{\pi K_{xx}}{2l} \left[- \left(\frac{4a^2l^2}{5} + \frac{8abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) T_i + \right. \\ &\left. + 2 \left(\frac{32a^2l^2}{15} + \frac{16abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) T_j \right] - \left(\frac{52al^2}{15} + 8abl + \frac{16b^2}{3} \right) T_k = 0; \\ 3) \frac{\partial I}{\partial T_k} = 0; &\Rightarrow \frac{\pi K_{xx}}{2l} \left[\left(\frac{2a^2l^2}{5} + \frac{2abl}{3} + \frac{2b^2}{3} \right) T_i - \right. \\ &\left. - \left(\frac{52a^2l^2}{15} + 8abl + \frac{16b^2}{3} \right) T_j + 2 \left(\frac{23a^2l^2}{15} + \frac{11abl}{3} + \frac{7b^2}{3} \right) T_k \right] + \\ &\left. + \pi(al+b)^2 h T_k = \pi(al+b)h T_{CO}; \right\} h \quad (3.8) \end{aligned}$$

Немесе ықшамдалғаннан кейін (3.8)-теңдеулер жүйесін былайша жазуға болады:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}T_i - a_{12}T_j + a_{13}T_k &= -\frac{2b^2ql}{K_{xx}} \\ -a_{12}T_i + a_{22}T_j - a_{23}T_k &= 0 \\ -a_{13}T_i - a_{23}T_j + \left[a_{33} + \frac{2(al+b)^2 \cdot l}{K_{xx}} \right] T_k &= \frac{2(al+b)^2 lh T_{CO}}{K_{xx}} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Мұнда

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 2 \left(\frac{a^2 l^2}{5} + abl + \frac{7b^2}{3} \right); \\ a_{12} &= \left(\frac{4a^2 l^2}{5} + \frac{8abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right); \\ a_{13} &= \left(\frac{2a^2 l^2}{5} + \frac{2abl}{3} + \frac{2b^2}{3} \right); \\ a_{22} &= 2 \left(\frac{32a^2 l^2}{15} + \frac{16abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right); \\ a_{23} &= \left(\frac{52a^2 l^2}{15} + 8abl + \frac{16b^2}{3} \right); \\ a_{33} &= 2 \left(\frac{23a^2 l^2}{15} + \frac{11abl}{3} + \frac{7b^2}{3} \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Енді (3.9)-жүйенің екінші теңдеуінен T_i -нің T_j және T_k арқылы өрнегін табамыз.

$$T_i = \frac{a_{22}}{a_{12}} T_j - \frac{a_{23}}{a_{12}} T_k, \quad (3.11)$$

Енді (3.11)-өрнекті (3.9)-жүйенің бірінші теңдеуіне қойып, мынадай теңдеу аламыз:

$$(a_{22} - a_{12}) T_j + (a_{13} - a_{23}) T_k = -\frac{2b^2 ql}{K_{xx}}. \quad (3.12)$$

Енді (3.11)-өрнекті (3.9)-жүйенің үшінші теңдеуіне қойып, мынадай теңдеу аламыз:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{a_{13} \cdot a_{22}}{a_{12}} + a_{23} \right) T_j + \left[\frac{a_{13} \cdot a_{23}}{a_{12}} + a_{33} + \frac{2(al+b)^2 l}{K_{xx}} \right] T_k = \\ = \frac{2(al+b)^2 lh T_{CO}}{K_{xx}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Енді (3.12 – 3.13) теңдеулер жүйесін бірге қараймыз. Мұнда (2.43)-өрнектен T_j -ні T_k арқылы өрнектейміз.

$$T_j = \frac{(a_{23} - a_{13})}{(a_{22} - a_{12})} T_k - \frac{2b^2 ql}{K_{xx} (a_{22} - a_{12})}; \quad (3.14)$$

Мұнда ыңғайлы болу үшін мынадай белгілеулер енгізейік:

$$b_1 = \frac{(a_{22} - a_{13})}{(a_{22} - a_{12})}; \quad b_2 = \frac{2b^2 ql}{K_{xx} (a_{22} - a_{12})}; \quad (3.15)$$

Дәл осылай (3.13)-өрнекті ыңғайлы жазу үшін мынадай белгілеулер енгізейік:

$$b_3 = \left(\frac{a_{13} \cdot a_{22}}{a_{12}} + a_{23} \right);$$

$$b_4 = \left[\frac{a_{13} \cdot a_{23}}{a_{12}} + a_{33} + \frac{2(al+b)^2 l}{K_{xx}} \right];$$

$$b_5 = \frac{2(al+b)^2 lhT_{CO}}{K_{xx}};$$
(3.16)

Онда (3.14)-ды келесі түрде жазуға болады:

$$T_j = b_1 \cdot T_k - b_2. \quad (3.17)$$

Дәл солай (3.13)-өрнекті былайша жазуға болады:

$$-b_3 T_j + b_4 T_k = b_5 \quad (3.18)$$

Енді (3.17)-өрнектегі T_j -ны (3.18)-өрнектегі T_j -ның орнына қойып, мынадай өрнек аламыз:

$$-b_3(b_1 T_k - b_2) + b_4 T_k = b_5$$

$$(b_4 - b_1 b_3) T_k = b_2 b_3 + b_5$$

Бұл өрнектен T_k -ның мәнін табамыз.

$$T_k = \frac{(b_2 b_3 + b_5)}{(b_4 - b_1 b_3)} \quad (3.19)$$

Онда (3.19)-өрнектен табылған T_k -ның мәнін (3.17)-өрнекке қойып, T_j -ның мәні табылады. Ары қарай табылған T_k , T_j -лердің мәндерін (3.11)-өрнекке қойып, T_i -нің мәні табылады. Нәтижеде берілген стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңын табуға болады. Ол мынадай болады:

$$T(x, a, b, l, K_{xx}, h, T_{CO}, q) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i +$$

$$+ \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.20)$$

Бұл формуланың ыңғайлылығы – оның көп параметрлерге тәуелділігінде. Яғни, берілген стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңына әрбір параметрдің мәндерінің қаншалықты әсер етуін зерттеуге өте қолайлы. Мұнда қолданылған, энергияның сақталу заңы алынған нәтиженің дәлдігінің жоғары болуының кепілдігі болады [62-71].

3.2 Көлденең қима ауданы өзгеруші стерженнің термо-механикалық күйін математикалық модельдеу

Өткен бөлімде зерттелген горизонталь көлденең қима ауданы өзгеруші, шекті ұзындықтағы стерженді қаралық. Егер оның бір шеті мықтап бекітілген, ал екінші шеті бос тұрған болса, онда ол әртүрлі жылу көздері әсерінен ұзарады [72-75]. Оның ұзару мөлшері жылу физикасының негізгі заңдарына сәйкес болады.

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x) dx \quad (3.21)$$

Мұнда стержень материалының жылудан кеңею коэффициенті – α , зерттеліп жатқан температураларда тұрақты деп алсақ, онда

$$\begin{aligned} \Delta l_T &= \int_0^l \alpha T(x) dx = \frac{\alpha}{l^2} \int_0^l [(2x^2 - 3lx + l^2)T_i + \\ &+ (4lx - 4x^2)T_j + (2x^2 - lx)T_k] dx = \\ &= \frac{\alpha}{l^2} \left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3lx^2}{2} + l^2x \right) T_i + \left(2lx^2 - \frac{4x^3}{3} \right) T_j + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) T_k \right] \Big|_0^l = \\ &= \alpha \cdot l \left[\frac{1}{6} T_i + \frac{2}{3} T_j + \frac{1}{6} T_k \right] = \frac{\alpha l}{6} (T_i + 4T_j + T_k) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Мұнда T_i , T_j , T_k -лар (2.22, 3.14, 3.19)-өрнектер арқылы табылады. Сонымен зерттеліп жатқан стерженнің ұзаруы көптеген параметрлерге тәуелді болады екен.

$$\Delta l_T(\alpha, q, h, T_{co}, K_{xx}, a, b, l) = \frac{\alpha l}{6} (T_i + 4T_j + T_k) \quad (3.23)$$

Енді осы стерженнің екі шеті де мықтап бекітілген болсын. Онда стержень әртүрлі жылу көздері әсерінен ұзара алмайды. Сондай-ақ ол қысқара да алмайды. Нәтижеде стерженнің осі бойынша бағытталған R [кГ] сығушы күш пайда болады [76-80]. Оның мәні деформациялардың сәйкестігі қасиетінен табылады.

$$R(\alpha, E, F, l, q, h, T_{co}, K_{xx}, a, b) = -\frac{\Delta l_T \cdot EF}{l} \quad (3.24)$$

Мұнда $F_{op} = \frac{\int_0^l F(x) dx}{l}$ – стерженнің көлденең қима ауданының орташа мәні.

Екі шеті мықтап бекітілген, көлденең қима ауданы өзгеруші, шекті ұзындықтағы стерженде R сығушы күш пайда болып, ол температуралық-кернеулі-деформациялық жағдай туындатады. Алдымен стерженнің ұзындығы бойынша термо-серпімділік кернеуі $\sigma(x)$ -тің таралу заңын табамыз. Ол Гуктың сәйкес заңынан табылады.

$$\begin{aligned} \sigma(x, \alpha, F, l, q, h, T_{co}, K_{xx}, a, b) &= \\ &= \frac{R}{F(x)} = -\frac{\Delta l_T \cdot E \cdot F_{op}}{l \cdot F(x)}, \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (3.25)$$

Онда Гук заңына сәйкес, стержень ұзындығы бойынша термо-серпімділік деформациясының таралу заңы табылады.

$$\varepsilon(x, \alpha, F, l, q, h, T_{co}, K_{xx}, a, b) = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\Delta l_T \cdot F_{op}}{l \cdot F(x)}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.26)$$

Стержень ұзындығы бойынша температуралық деформацияның таралу заңдылығы жылу физикасының негізгі заңдарына сәйкес табылады.

$$\varepsilon_T(x, \alpha, F, l, q, h, T_{CO}, K_{xx}, a, b) = -\alpha T(x) = -\frac{\alpha}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2) \Gamma_i + (4lx - 4x^2) \Gamma_j + (2x^2 - lx) \Gamma_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.27)$$

Мұнда T_i , T_j , T_k -лар (3.11, 3.13, 3.19)-өрнектер арқылы анықталған болады. Онда стерженнің ұзындығы бойынша температуралық кернеудің таралу заңы Гук заңына сәйкес табылады.

$$\sigma_T(x, \alpha, E, F, l, q, h, T_{CO}, K_{xx}, a, b) = -\alpha ET(x) = -\frac{\alpha E}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2) \Gamma_i + (4lx - 4x^2) \Gamma_j + (2x^2 - lx) \Gamma_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.28)$$

Енді стерженнің ұзындығы бойынша серпімділік деформациясының таралу заңын термо-серпімділік теориясының негізінде анықтауға болады.

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = -\frac{\Delta l_T \cdot F_{op}}{l \cdot F(x)} + \frac{\alpha}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2) \Gamma_i + (4lx - 4x^2) \Gamma_j + (2x^2 - lx) \Gamma_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.29)$$

Онда Гук заңына сәйкес, стерженнің ұзындығы бойынша серпімділік кернеуінің таралу заңын табуға болады.

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = -\frac{\Delta l_T \cdot E \cdot F_{op}}{l \cdot F(x)} + \frac{\alpha E}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2) \Gamma_i + (4lx - 4x^2) \Gamma_j + (2x^2 - lx) \Gamma_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.30)$$

Енді зерттеліп жатқан стерженнің ұзындығы бойынша орын ауыстыру (перемещение) заңын табудың әдісін қарастырамыз [81-87]. Орын ауыстыру заңын $u(x)$ деп белгілейміз. Ол үшін серпімділік теориясындағы серпімділік деформациясымен орын ауыстыру арасындағы байланысты пайдаланамыз [88].

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.31)$$

Стержень ұзындығы бойынша орын ауыстырудың таралу заңын жергілікті координата жүйесінде екінші дәрежелі сплайн функциялар арқылы өрнектейміз.

$$u(x) = \varphi_i(x)u_i + \varphi_j(x)u_j + \varphi_k(x)u_k = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_j + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_k, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.32)$$

Мұнда u_i – стерженнің сол шетіндегі көлденең қимасының орын ауыстыруы, яғни $u_i = u(x=0)$. Сондай-ақ, u_j – стерженнің ортасындағы көлденең қимасының орын ауыстыруы, яғни $u_j = u\left(x = \frac{l}{2}\right)$. Ал u_k – стерженнің оң шетіндегі көлденең қимасының орын ауыстыруы, яғни $u_k = u(x=l)$. Қазірге u_i , u_j , u_k -лардың мәндері белгісіз. Серпімділік теориясына сәйкес серпімділік кернеуі, деформациясы және орын ауыстыруы арасындағы байланыс Гук заңына сәйкес болады.

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.33)$$

Сондай-ақ (3.32)-өрнекті пайдаланып $u(x)$ -тің градиентін табамыз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) u_i + \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) u_j + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) u_k = \varepsilon_x(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.34)$$

Енді жылу өрісі әсеріндегі зерттеліп жатқан стерженнің серпімділік деформациясының потенциал энергиясын өрнектейтін функционалды жазамыз.

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} \cdot \varepsilon_x(x) dV - \int_V \alpha E T(x) \varepsilon_x(x) dV \quad (3.35)$$

Бұл функционалдың өрнегіндегі бірінші интегралды есептейміз.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} \cdot \varepsilon_x(x) dV = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2(x) dV = \\ &= \frac{E\pi}{2} \int_0^l (ax+b)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi E}{2} \int_0^l (a^2 x^2 + 2abx + b^2) \cdot \left[\left(\frac{4x-3l}{l^2} \right) u_i + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{4l-8x}{l^2} \right) u_j + \left(\frac{4x-l}{l^2} \right) u_k \right]^2 dx = \\ &= \frac{\pi E}{2l^4} \int_0^l (a^2 x^2 + 2abx + b^2) \cdot [(4x-3l)u_i + (4l-8x)u_j + \\ &+ (4x-l)u_k]^2 dx = \frac{\pi E}{2l^4} \int_0^l (a^2 x^2 + 2abx + b^2) \cdot [(16x^2 - 24lx + 9l^2)u_i^2 + \\ &+ 2(40lx - 32x^2 - 12l^2)u_i u_j + 2(16x^2 - 16lx + 3l^2)u_i u_k + \\ &+ 2(24lx - 4l^2 - 32x^2)u_j u_k + (16l^2 - 64lx + 64x^2)u_j^2 + \\ &+ (16x^2 - 8lx + l^2)u_k^2] dx = \frac{\pi E}{2l^4} \int_0^l (16a^2 x^4 - 24a^2 l x^3 + 9a^2 l^2 x^2 + \\ &+ 32abx^3 - 48abl x^2 + 18abl^2 x + 16b^2 x^2 - 24b^2 l x + 9b^2 l^2) u_i^2 + \\ &+ (80a^2 l x^3 - 64a^2 x^4 - 24a^2 l^2 x^2 + 160abl x^2 - 128abx^3 - \\ &- 48abl^2 x + 80b^2 l x - 64b^2 x^2 - 24b^2 l^2) u_i u_j + (32a^2 x^4 - 32a^2 l x^3 + \\ &+ 6a^2 l^2 x^2 + 64abx^3 - 64abl x^2 + 12abl^2 x + 32b^2 x^2 - \\ &- 32b^2 l x + 6b^2 l^2) u_i u_k + (48a^2 l x^3 - 8a^2 l^2 x^2 - 64a^2 x^4 - 96abl x^2 - \\ &- 16abl^2 x - 128abx^3 + 48b^2 l x - 8b^2 l^2 - 64b^2 x^2) u_j u_k + \\ &+ (16a^2 b^2 x^2 - 64a^2 l x^3 + 64a^2 x^4 + 32abl^2 x - 128abl x^2 + \\ &+ 128abx^3 + 16b^2 l^2 - 64b^2 l x + 64b^2 x^2) u_j^2 + (16a^2 x^4 - 8a^2 l x^3 + \\ &+ a^2 l^2 x^2 + 32abx^3 - 16abl x^2 + 2abl^2 x + 16b^2 x^2 - 8b^2 l x + \\ &+ b^2 l^2) u_k^2] dx = \frac{\pi E}{2l^4} \left[\left(\frac{16a^2 x^5}{5} - 6a^2 l x^4 + 3a^2 l^2 x^3 + 8abx^4 - \right. \right. \\ &- 16abl x^3 + 9abl^2 x^2 + \frac{16b^2 x^3}{3} - 12b^2 l x^2 + 9b^2 l^2 x) u_i^2 + \\ &+ (20a^2 l x^4 - \frac{64a^2 x^5}{5} - 8a^2 l^2 x^3 + \frac{160abl x^3}{3} - 32abx^4 - 24abl^2 x^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 40b^2lx^2 - \frac{64b^2x^3}{3} - 24b^2l^2x)u_iu_j + \left(\frac{32a^2x^5}{5} - 8a^2lx^4 + 2a^2l^2x^3 + \right. \\
& + 16abx^4 - \frac{64abl^2x^3}{3} + 6abl^2x^2 + \frac{32b^2x^3}{3} - 16b^2lx^2 + 6b^2l^2x)u_iu_k + \\
& + (12a^2lx^4 - \frac{8a^2l^2x^3}{3} - \frac{64a^2x^5}{5} + 32abl^2x^3 - 8abl^2x^2 - 32abx^4 + \\
& + 24b^2lx^2 - 8b^2l^2x - \frac{64b^2x^3}{3})u_ju_k + \left(\frac{16a^2l^2x^3}{3} - 16a^2lx^4 + \right. \\
& + \frac{64a^2x^5}{5} + 16abl^2x^2 - \frac{128abl^2x^3}{3} + 32abx^4 + 16b^2l^2x - \\
& - 32b^2lx^2 + \frac{64b^2x^3}{3})u_j^2 + \left(\frac{16a^2x^5}{5} - 2a^2lx^4 + \frac{a^2l^2x^3}{3} + 8abx^4 - \right. \\
& - \frac{16abl^2x^3}{3} + abl^2x^2 + \frac{16b^2x^3}{3} - 4b^2lx^2 + b^2l^2x)u_k^2 \Big|_0^l = \\
& = \frac{\pi E}{2l^4} \left[\left(\frac{a^2l^5}{5} + abl^4 + \frac{7b^2l^3}{3} \right) u_i^2 - \left(\frac{4a^2l^5}{5} + \frac{8abl^4}{3} + \frac{16b^2l^3}{3} \right) u_iu_j + \right. \\
& + \left(\frac{2a^2l^5}{5} + \frac{2abl^4}{3} + \frac{2b^2l^3}{3} \right) u_iu_k - \left(\frac{52a^2l^5}{15} + 8abl^4 + \frac{16b^2l^3}{3} \right) u_ju_k + \\
& + \left. \left(\frac{32a^2l^5}{15} + \frac{16abl^4}{3} + \frac{16b^2l^3}{3} \right) u_j^2 + \left(\frac{23a^2l^5}{15} + \frac{11abl^4}{3} + \frac{7b^2l^3}{3} \right) u_k^2 \right]
\end{aligned}$$

Бұл өрнекті ықшамдап мынадай өрнекті табамыз:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 = & \frac{\pi E}{2l} \left[\left(\frac{a^2l^2}{5} + abl + \frac{7b^2}{3} \right) u_i^2 - \left(\frac{4a^2l^2}{5} + \frac{8abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) u_iu_j + \right. \\
& + \left(\frac{2a^2l^2}{5} + \frac{2abl}{3} + \frac{2b^2}{3} \right) u_iu_k - \left(\frac{52a^2l^2}{15} + 8abl + \frac{16b^2}{3} \right) u_ju_k + \\
& + \left. \left(\frac{32a^2l^2}{15} + \frac{16abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) u_j^2 + \left(\frac{23a^2l^2}{15} + \frac{11abl}{3} + \frac{7b^2}{3} \right) u_k^2 \right] \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Енді жылу өрісі әсеріндегі стерженнің серпімділік деформациясының потенциал энергиясының (3.35) өрнегіндегі екінші интегралды қарастырайық.

$$\begin{aligned}
\Pi_2 = & \int_V \alpha E T(x) \varepsilon_x(x) dV = \alpha E \int_V T(x) \varepsilon_x(x) dV = \\
& = \pi \alpha E \int_0^l (ax+b)^2 \left[\left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) T_i + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) T_j + \right. \\
& + \left. \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) T_k \right] \cdot \left[\left(\frac{4x - 3l}{l^2} \right) u_i + \left(\frac{4l - 8x}{l^2} \right) u_j + \left(\frac{4x - l}{l^2} \right) u_k \right] dx = \\
& = \frac{\pi \alpha E}{l^4} \int_0^l (ax+b)^2 \left[(8x^3 - 18lx^2 + 13l^2x - 3l^3) T_i u_i + \right. \\
& + (32lx^2 - 16x^3 - 20l^2x + 4l^3) T_i u_j + (8x^3 - 14lx^2 + 7l^2x - l^3) T_i u_k + \\
& + (28lx^2 - 12l^2x - 16x^3) T_j u_i + (16l^2x - 48lx^2 + 32x^3) T_j u_j + \\
& + (20lx^2 - 4l^2x - 16x^3) T_j u_k + (8x^3 - 10lx^2 + 3l^2x) T_k u_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (16lx^2 - 16x^3 - 4l^2x)T_k u_j + (8x^3 - 6lx^2 + l^2x)T_k u_k] dx = \\
& = \frac{\pi \alpha E}{l^4} \int_0^l (a^2x^2 + 2abx + b^2) \cdot [\dots] dx = \\
& = \frac{\pi \alpha E}{l^4} \int_0^l [(8a^2x^5 - 18a^2lx^4 + 13a^2l^2x^3 - 3a^2l^3x^2)T_i u_i + \\
& + (32a^2lx^4 - 16a^2x^5 - 20a^2l^2x^3 + 4a^2l^3x^2)T_i u_j + (8a^2x^5 - 14a^2lx^4 + \\
& + 7a^2l^2x^3 - a^2l^3x^2)T_i u_k + (28a^2lx^4 - 12a^2l^2x^3 - 16a^2x^5)T_j u_i + \\
& + (16a^2l^2x^3 - 48a^2lx^4 + 32a^2x^5)T_j u_j + (20a^2lx^4 - 4a^2l^2x^3 - 16a^2x^5)T_j u_k + \\
& + (8a^2x^5 - 10a^2lx^4 + 3a^2l^2x^3)T_k u_i + (16a^2lx^4 - 16a^2x^5 + 4a^2l^2x^3)T_k u_j + \\
& + (8a^2x^5 - 6a^2lx^4 + a^2l^2x^3)T_k u_k + (16abx^4 - 36abl^2x^3 + 26abl^2x^2 - \\
& - 6abl^3x)T_i u_i + (64abl^3x^3 - 32abx^4 - 40abl^2x^2 + 8abl^3x)T_i u_j + \\
& + (16abx^4 - 28abl^2x^3 + 14abl^2x^2 - 2abl^3x)T_i u_k + (56abl^3x^3 - 24abl^2x^2 - \\
& - 32abx^4)T_j u_i + (32abl^2x^2 - 96abl^3x^3 + 64abx^4)T_j u_j + \\
& + (40abl^3x^3 - 8abl^2x^2 - 32abx^4)T_j u_k + (16abx^4 - 20abl^3x^3 + \\
& + 6abl^2x^2)T_k u_i + (32abl^3x^3 - 32abx^4 - 8abl^2x^2)T_k u_j + \\
& + (16abx^4 - 12abl^3x^3 + 2abl^2x^2)T_k u_k + (8b^2x^3 - 18b^2lx^2 + \\
& + 13b^2l^2x - 3b^2l^3)T_i u_i + (32b^2lx^2 - 16b^2x^3 - 20b^2l^2x + 4b^2l^3)T_i u_j + \\
& + (8b^2x^3 - 14b^2lx^2 + 7b^2l^2x - b^2l^3)T_i u_k + (28b^2lx^2 - 12b^2l^2x - \\
& - 16b^2x^3)T_j u_i + (16b^2l^2x - 48b^2lx^2 + 32b^2x^3)T_j u_j + (20b^2lx^2 - \\
& - 4b^2l^2x - 16b^2x^3)T_j u_k + (8b^2x^3 - 10b^2lx^2 + 3b^2l^2x)T_k u_i + (16b^2lx^2 - \\
& - 16b^2x^3 - 4b^2l^2x)T_k u_j + (8b^2x^3 - 6b^2lx^2 + b^2l^2x)T_k u_k] dx = \\
& = \pi \alpha E \cdot \left[-\frac{a^2l^2}{60} T_i u_i + \frac{a^2l^2}{15} T_i u_j - \frac{a^2l^2}{20} T_i u_k - \frac{31a^2l^2}{15} T_j u_i - \right. \\
& - \frac{4a^2l^2}{15} T_j u_j + \frac{a^2l^2}{3} T_j u_k + \frac{a^2l^2}{12} T_k u_i + \frac{23a^2l^2}{15} T_k u_j + \frac{23a^2l^2}{60} T_k u_k - \\
& - \frac{2ab}{15} T_i u_i + \frac{4ab}{15} T_i u_j - \frac{2ab}{15} T_i u_k - \frac{2ab}{5} T_j u_i - \frac{8ab}{15} T_j u_j + \frac{14ab}{15} T_j u_k + \\
& + \frac{ab}{5} T_k u_i - \frac{16ab}{15} T_k u_j + \frac{13ab}{15} T_k u_k - \frac{b^2}{2} T_i u_i + \frac{2b^2}{3} T_i u_j - \frac{b^2}{6} T_i u_k - \\
& \left. - \frac{2b^2}{3} T_j u_i + \frac{2b^2}{3} T_j u_k + \frac{b^2}{6} T_k u_i - \frac{2b^2}{3} T_k u_j + \frac{b^2}{2} T_k u_k \right] \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Сонымен зерттеліп жатқан стерженнің жылу көздері әсерінен пайда болатын серпімділік деформациясының потенциал энергиясын өрнектейтін функционалының интегралданған көрінісі мынадай болады екен:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (3.38)$$

Мұнда Π_1 (3.36), ал Π_2 (3.37)-өрнектер арқылы табылады. Мұнда зерттеліп жатқан стерженнің екі шеті мықтап бекітілген. Сондықтан да $u_i = 0$;

$u_k = 0$ болады. Ал u_j -нің мәні энергияның сақталу заңын орындауы қажет. Сол себепті оның мәнін энергияның сақталу заңынан табамыз, яғни

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0; \Rightarrow \frac{\pi E}{2l} \cdot 2 \left(\frac{32a^2 l^2}{15} + \frac{16abl}{3} + \frac{16b^2}{3} \right) u_j +$$

$$+ \pi \alpha E \left(\frac{a^2 l^2}{15} T_i - \frac{4a^2 l^2}{15} T_j + \frac{23a^2 l^2}{15} T_k + \frac{4ab}{15} T_i - \right.$$

$$\left. - \frac{8ab}{15} T_j - \frac{16ab}{15} T_k + \frac{2b^2}{3} T_i - \frac{2b^2}{3} T_k \right) = 0$$

Бұл теңдеуден u_j -ның мәні табылады.

$$u_j = - \frac{15}{(32a^2 l^2 + 80abl + 80b^2)} \left(\frac{a^2 l^2}{15} T_i - \frac{4a^2 l^2}{15} T_j + \frac{23a^2 l^2}{15} T_k + \right.$$

$$\left. + \frac{4ab}{15} T_i - \frac{8ab}{15} T_j - \frac{16ab}{15} T_k + \frac{2b^2}{3} T_i - \frac{2b^2}{3} T_k \right) \text{ немесе}$$

$$u_j = - \frac{\alpha l}{(32a^2 l^2 + 80abl + 80b^2)} \left[(a^2 l^2 + 4ab + 10b^2) T_i - \right.$$

$$\left. - (4a^2 l^2 + 8ab) T_j + (23a^2 l^2 - 16ab - 10b^2) T_k \right] \quad (3.39)$$

Енді стерженнің ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңын табамыз.

$$u(x) = \varphi_i(x) u_i + \varphi_j(x) u_j + \varphi_k(x) u_k =$$

$$= \varphi_i(x) \cdot 0 + \varphi_j(x) u_j + \varphi_k(x) \cdot 0 = \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_j; \quad (3.40)$$

Мұнда u_j , (3.39)-өрнектен табылады. Сондай-ақ (3.39) өрнектегі T_i , T_j , T_k -лар (3.11), (3.14) және (3.19)-өрнектерден табылады. Сонымен стержень ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңы мынадай он параметрге тәуелді болады екен:

$$u(x, a, b, \alpha, E, K_{xx}, l, h, T_{CO}, q) = \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_j.$$

3.3 Соңғы жылу ағындарының мәніне байланысты өзекшенің

термомеханикалық күйінің өзгеруіне арналған есептеу тәжірибелері

Ауданы F [см²] көлденең қимасы бар ұзындығы L [см] шектеулі және көлденең сырықты қарастырайық.

ОХ координат осін солдан оңға қарай бағыттаймыз. Ол стержень осімен сәйкес келеді. Қима ауданы r [см]. Қарастырылған стерженнің сол жақ ұшының

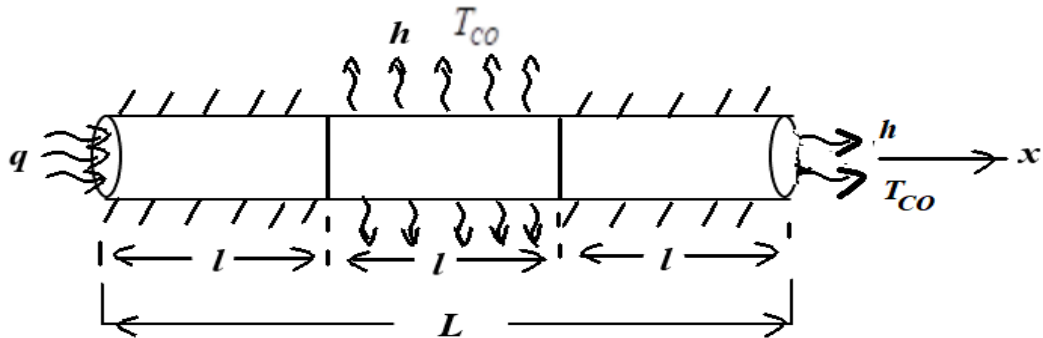
көлденең қимасы аймақтарына бірдей қарқындылықтағы жылу ағындары q $\left[\frac{W}{\text{см}^2} \right]$ түсірілген. Стерженнің бірінші 1/3 бөлігі ($0 \leq x \leq l$) және үшінші 1/3

бөлігінің ($2l \leq x \leq L$) бүйірлік беттері термиялық оқшауланған.

Стерженнің екінші 1/3 бүйір бетінің ауданы арқылы ($l \leq x \leq 2l$), осы аймақты қоршаған ортамен конвективті жылу алмасу жүреді.

Бұл жағдайда жылу алмасу коэффициенті h $\left[\frac{W}{\text{см}^2 \cdot ^\circ C} \right]$ және қоршаған ортаның

температурасы T_{co} [$^{\circ}C$]. Мұнда $l = \frac{L}{3}$ [см]. Зерттелген стерженнің құрылымдық сызбасы сурет 3.2-де көрсетілген.



Сурет 3.2 - Зерттелген стерженнің жобалық сызбасы

Стерженді материалдың физикалық-механикалық қасиеттері [89-92] жылу өткізгіштік коэффициентімен $K_{xx} \left[\frac{W}{cm \cdot ^{\circ}C} \right]$, жылу кеңею коэффициентімен $\alpha \left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ және серпімділік модулімен сипатталады $E \left[\frac{kG}{cm^2} \right]$. Шешуші теңдеулер жүйесін құру үшін зерттелетін стерженнің үш бөлігін бөлек қарастырамыз. Зерттелген стерженнің бірінші 1/3 бөлігі үшін жұмыс істейтін толық жылу энергиясының өрнегі келесі түрге ие

$$I_1 = \int_{F(x=0)} q \cdot T ds + \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = F \cdot q \cdot T_1 + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_1^2 - 16T_1T_2 + 2T_1T_3 - 16T_2T_3 + 16T_2^2 + 7T_3^2) \quad (3.41)$$

Енді зерттелген стерженнің екінші 1/3 бөлігін қарастырамыз. Бұл бөлім үшін функционалды жылу энергиясының өрнегі келесі формада болады

$$I_2 = \int_{S_{нбн}} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds + \int_{V_2} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV = \frac{\pi r h l}{15} (2T_3^2 + 2T_3T_4 - T_3T_5 + 8T_4^2 + 2T_5^2 + 2T_4T_5 - 5T_3T_{co} - 20T_4T_{co} - 5T_5T_{co} + 15T_{co}^2) + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_3^2 - 16T_3T_4 + 2T_3T_5 - 16T_4T_5 + 16T_4^2 + 7T_5^2) \quad (3.42)$$

Соңында стерженнің соңғы 1/3 бөлігін қарастырайық. Толық жылу энергиясының өрнегінің осы бөлігі үшін функционалды келесі түрге ие

$$I_3 = \int_{V_3} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{F(x=L)} \frac{h}{2} (T - T_{co})^2 ds = \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_5^2 - 16T_5T_6 + 2T_5T_7 - 16T_6T_7 + 16T_6^2 + 7T_7^2) + \frac{Fh}{2} (T_7 - T_{co})^2 \quad (3.43)$$

Сонымен, $I_1 + I_2 + I_3$ қорытындылай келе, зерттелген стержень үшін толық жылу энергиясының функционалды өрнегін табамыз

$$\begin{aligned}
 I = & F \cdot q \cdot T_1 + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_1^2 - 16T_1T_2 + 2T_1T_3 - 16T_2T_3 + 16T_2^2 + 7T_3^2) + \\
 & + \frac{\pi hl}{15} (2T_3^2 + 2T_3T_4 - T_3T_5 + 8T_4^2 + 2T_5^2 - 5T_3T_{CO} - 20T_4T_{CO} - 5T_5T_{CO} + 15T_{CO}^2) + \\
 & + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_3^2 - 16T_3T_4 + 2T_3T_5 - 16T_4T_5 + 16T_4^2 + 7T_5^2) + \\
 & + \frac{FK_{xx}}{6l} (7T_5^2 - 16T_5T_6 + 2T_5T_7 - 16T_6T_7 + 16T_6^2 + 7T_7^2) + F \cdot q \cdot T_7
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Бұл өрнекте түйіндік температуралар белгісіз T_i ($i=1 \div 7$). Олардың мәндері энергияның сақталу заңын қанағаттандыру үшін олар келесі теңдеулер жүйесін қанағаттандыруы керек

$$\left\{ \begin{aligned}
 1) \frac{\partial I}{\partial T_1} = 0; & \Rightarrow F \cdot q + \frac{FK_{xx}}{6l} (14T_1 - 16T_2 + 2T_3) = 0; \\
 2) \frac{\partial I}{\partial T_2} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (-16T_1 + 32T_2 - 16T_3) = 0; \\
 3) \frac{\partial I}{\partial T_3} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (2T_1 - 16T_2 + 28T_3 - 16T_4 + 2T_5) + \\
 & + \frac{\pi hl}{15} (4T_3 + 2T_4 - T_5 - 5T_{CO}) = 0; \\
 4) \frac{\partial I}{\partial T_4} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (-16T_3 + 32T_4 - 16T_5) + \\
 & + \frac{\pi hl}{15} (2T_3 + 16T_4 - 20T_{CO}) = 0; \\
 5) \frac{\partial I}{\partial T_5} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (2T_3 - 16T_4 + 28T_5 - 16T_6 + 2T_7) + \\
 & + \frac{\pi hl}{15} (-T_3 + 4T_5 - 5T_{CO}) = 0; \\
 6) \frac{\partial I}{\partial T_6} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (-16T_5 + 32T_6 - 16T_7) = 0; \\
 7) \frac{\partial I}{\partial T_7} = 0; & \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{6l} (2T_5 - 16T_6 + 14T_7) + Fq = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{3.45}$$

Тиісті оңайлатулардан кейін, біз табиғи шекара жағдайларын ескере отырып, келесі шешуші сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

$$\left. \begin{aligned}
7T_1 - 8T_2 + T_3 &= -\frac{3ql}{K_{xx}} \\
T_1 - 2T_2 + T_3 &= 0 \\
T_1 - 8T_2 + \left(14 + \frac{4\pi rhl^2}{5FK_{xx}}\right)T_3 + \left(\frac{2\pi rhl^2}{5FK_{xx}} - 8\right)T_4 + \\
&+ \left(1 - \frac{\pi rhl^2}{5FK_{xx}}\right)T_5 = \frac{T_{co}\pi rhl^2}{FK_{xx}} \\
\left(\frac{\pi rhl^2}{20FK_{xx}} - 1\right)T_3 + \left(2 + \frac{2\pi rhl^2}{5FK_{xx}}\right)T_4 - T_5 &= \frac{\pi rhl^2}{2FK_{xx}}T_{co} \\
T_5 - 2T_6 + T_7 &= 0 \\
T_5 - 8T_6 + 7T_7 &= -\frac{3ql}{K_{xx}}
\end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Осы жүйені шеше отырып, энергияны сақтау заңын және бар табиғи шекара шарттарын табиғи түрде қанағаттандыратын түйін температурасының T_i ($i=1 \div 7$) мәндері анықталады. Олар стерженнің әрбір $1/3$ ұзындығы бойынша температураның таралу заңдылықтарын анықтау үшін қолданылады. Әрі қарай, зерттелген стерженнің ұзындығы бойынша температураның таралу заңы анықталады. Атап айтқанда, стерженнің бірінші $1/3$ ұзындығы бойынша температураның таралу заңы келесі түрге ие болады

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(x) &= \varphi_i(x)T_1 + \varphi_j(x)T_2 + \varphi_k(x)T_3 = \\
&= \frac{1}{l^2} \left[(2x^2 - 3lx + l^2)T_1 + (4lx - 4x^2)T_2 + (2x^2 - lx)T_3 \right] \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Стерженнің екінші $1/3$ ұзындығы шегінде температураның таралу заңы келесі түрге ие

$$T^{(2)}(x) = \frac{1}{l^2} \left[(2x^2 - 3lx + l^2)T_3 + (4lx - 4x^2)T_4 + (2x^2 - lx)T_5 \right] \quad (3.48)$$

Стерженнің үшінші $1/3$ ұзындығы бойымен таралу заңы осыған ұқсас түрде анықталады

$$T^{(3)}(x) = \frac{1}{l^2} \left[(2x^2 - 3lx + l^2)T_5 + (4lx - 4x^2)T_6 + (2x^2 - lx)T_7 \right] \quad (3.49)$$

Егер қаралып жатқан стерженнің бір ұшы қатаң қысылып, ал екіншісі бос болса, онда ол температуралық кеңеюге байланысты ұзарады [93-94]. Стерженнің температуралық ұзаруы термофизика теориясына сәйкес анықталады.

$$\Delta l_T = \int_0^L \alpha \cdot T(x) dx \quad (3.50)$$

мұнда $\alpha \left[\frac{1}{^{\circ}C} \right]$ - стержень материалының жылулық кеңею коэффициенті. Сонда стерженнің алғашқы $1/3$ бөлігінің термиялық созылу шамасы келесідей анықталады

$$\begin{aligned} \Delta l_{T_1} &= \int_0^l \alpha \cdot T^{(1)}(x) dx = \frac{\alpha}{l^2} \int_0^l [(2x^2 - 3lx + l^2)T_1 + (4lx - 4x^2)T_2 + (2x^2 - lx)T_3] dx = \\ &= \frac{\alpha}{l^2} \left[\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3lx^2}{2} + l^2x \right) T_1 + \left(2lx^2 - \frac{4x^3}{3} \right) T_2 + \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} \right) T_3 \right] \Big|_0^l = \\ &= \alpha l \left[\frac{1}{6} T_1 + \frac{2}{3} T_2 + \frac{1}{6} T_3 \right] = \frac{\alpha l}{6} (T_1 + 4T_2 + T_3) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Сол сияқты, зерттелген стерженің екінші және үшінші 1/3 бөліктерінің созылу мәндері анықталады.

$$\Delta l_{T_2} = \frac{\alpha l}{6} (T_3 + 4T_4 + T_5) \quad (3.52)$$

$$\Delta l_{T_3} = \frac{\alpha l}{6} (T_5 + 4T_6 + T_7) \quad (3.53)$$

Содан кейін зерттелген стерженнің жалпы термиялық созылуының мәні келесідей анықталады

$$\Delta l_T = \Delta l_{T_1} + \Delta l_{T_2} + \Delta l_{T_3} = \frac{\alpha l}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7) \quad (3.54)$$

Егер зерттелген стерженнің екі ұшы да қатты қысылған болса, онда оны ұзартуға болмайды. Бірақ таяқтағы термиялық кеңеюге байланысты осьтік қысу күш R [$\kappa\Gamma$] пайда болады [95-98]. Оның мәні деформацияның үйлесімділік шартынан келесідей анықталады

$$R = - \frac{\Delta l_T \cdot E \cdot F}{L} \quad (3.55)$$

E $\left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ - стержень материалы серпімділік модулі; F [см^2]- стерженнің көлденең қимасының ауданы; L [см]- зерттелген стерженнің ұзындығы. (3.54) - ті (3.55) -ке ауыстырып келесіні аламыз

$$\begin{aligned} R &= - \frac{\frac{\alpha E F l}{6} (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{L} = \\ &= - \frac{\alpha E F l (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{6L} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Әрине, R [$\kappa\Gamma$] осьтік қысу күшінің әсерінен стерженде тұрақты термо-кернеу-деформация күйі пайда болады. Термосерпімділік кернеулік компоненттің таралу заңы σ $\left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ жалпыланған Гук заңы негізінде анықталды

$$\sigma = \frac{R}{F} = - \frac{\alpha E l (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{6L} \quad (3.57)$$

Онда деформацияның термосерпімділік компонентінің таралу заңы ε [өлшемсіз] де Гук заңы негізінде анықталады

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = - \frac{\alpha l (T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{6L} \quad (3.58)$$

Деформацияның температуралық компонентінің таралу заңы $\varepsilon_T(x)$ [өлшемсіз] термофизика заңы негізінде анықталады

$$\varepsilon_T(x) = -\alpha \cdot T(x) \quad (3.59)$$

Содан кейін сәйкес Гук заңы негізінде $\sigma_T(x) \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ кернеудің температуралық компонентінің стержень бойынша таралуы анықталады

$$\sigma_T(x) = E \cdot \varepsilon_T(x) = -\alpha ET(x) \quad (3.60)$$

Деформацияның серпімді компонентінің таралу заңы термосерпімділік теориясы негізінде анықталады $\varepsilon_x(x)$ [өлшемсіз]

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon - \varepsilon_T(x) = -\frac{\alpha l(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{6L} + \alpha T(x) \quad (3.61)$$

Содан кейін Гук заңына сәйкес $\sigma_x(x) \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ термосерпімділік кернеулік компоненттің таралу заңы анықталады

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) = -\frac{\alpha El(T_1 + 4T_2 + 2T_3 + 4T_4 + 2T_5 + 4T_6 + T_7)}{6L} + \alpha ET(x) \quad (3.62)$$

Орын ауыстыру өрісі температура өрісі болған кезде деформацияның потенциалды серпімді энергиясының функционалдығын минимизациялау әдісі негізінде анықталады. Ол үшін басынан бастап бір дискретті элементтің ұзындығында біз жергілікті координаттар жүйесіндегі квадраттық сплайн функциялары арқылы орын ауыстыруды ұсынамыз [99].

$$u(x) = \frac{1}{l^2} [(2x^2 - 3lx + l^2)u_i + (4lx + 4x^2)u_j + (2x^2 - lx)u_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.63)$$

мұнда $u_i = u(x=0)$; $u_j = u\left(x = \frac{l}{2}\right)$ және $u_k = u(x=l)$. Сонда бір дискретті

элементтің ұзындығындағы градиенттің орын ауыстыруы келесідей өрнектеледі

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{l^2} [(4x - 3l)u_i + (4l - 8x)u_j + (4x - l)u_k], \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.64)$$

Серпімді деформация мен орын ауыстырудың компоненті арасындағы байланыс келесідей

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{l^2} [(4x - 3l)u_i + (4l - 8x)u_j + (4x - l)u_k] \quad (3.65)$$

Енді бір дискретті элемент үшін температуралық өріс болған кезде серпімді деформацияның потенциалдық энергиясының функционалдығын жазайық

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} \cdot \varepsilon_x(x) dV - \int_V \alpha ET(x) \varepsilon_x(x) dV \quad (3.66)$$

Кернеу мен деформацияның серпімді компоненті арасындағы байланыс Гук заңына сәйкес орнатылады

$$\sigma_x(x) = E \cdot \varepsilon_x(x) \quad (3.67)$$

Содан кейін (3.64, 3.65, 3.67) қатынасты (3.66) өрнекке қойып, (3.66) -ны интегралданғаннан кейін, температуралық өрістің болуын ескере отырып,

серпімді деформацияның потенциалдық энергияларының интегралдық түрін аламыз.

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{EF}{2l} \left[\frac{7}{3}u_i^2 + \frac{16}{3}u_j^2 + \frac{7}{3}u_k^2 - \frac{16}{3}u_i u_j + \frac{2}{3}u_i u_k - \frac{16}{3}u_j u_k \right] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_1 u_i + \frac{2}{3}T_1 u_j - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}T_1 u_k - \frac{2}{3}T_2 u_i + \frac{2}{3}T_2 u_k + \frac{1}{6}T_3 u_i - \frac{2}{3}T_3 u_j + \frac{1}{2}T_3 u_k \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Сонда зерттелетін стерженнің бірінші 1/3 бөлігі үшін серпімді деформацияның потенциалдық энергиясы келесі түрге ие болады

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \frac{EF}{2l} \left[\frac{7}{3}u_1^2 + \frac{16}{3}u_2^2 + \frac{7}{3}u_3^2 - \frac{16}{3}u_1 u_2 + \frac{2}{3}u_1 u_3 - \frac{16}{3}u_2 u_3 \right] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_1 u_1 + \frac{2}{3}T_1 u_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}T_1 u_3 - \frac{2}{3}T_2 u_1 + \frac{2}{3}T_2 u_3 + \frac{1}{6}T_3 u_1 - \frac{2}{3}T_3 u_2 + \frac{1}{2}T_3 u_3 \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Зерттелетін стерженнің екінші 1/3 бөлігі үшін серпімді деформацияның функционалды потенциал энергиясының өрнегі келесі түрге ие болады

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \frac{EF}{6l} \left[7u_3^2 + 16u_4^2 + 7u_5^2 - 16u_3 u_4 + 2u_3 u_5 - 16u_4 u_5 \right] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_3 u_3 + \frac{2}{3}T_3 u_4 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}T_3 u_5 - \frac{2}{3}T_4 u_3 + \frac{2}{3}T_4 u_5 + \frac{1}{6}T_5 u_3 - \frac{2}{3}T_5 u_4 + \frac{1}{2}T_5 u_5 \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Осыған ұқсас, зерттелген стерженнің соңғы 1/3 бөлігі үшін потенциалдық энергияны өрнектеудің интегралды түрін табуға болады.

$$\begin{aligned} \Pi_3 = \frac{EF}{6l} \left[7u_5^2 + 16u_6^2 + 7u_7^2 - 16u_5 u_6 + 2u_5 u_7 - 16u_6 u_7 \right] - \alpha EF \left[-\frac{1}{2}T_5 u_5 + \frac{2}{3}T_5 u_6 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6}T_5 u_7 - \frac{2}{3}T_6 u_5 + \frac{2}{3}T_6 u_7 + \frac{1}{6}T_7 u_5 - \frac{2}{3}T_7 u_6 + \frac{1}{2}T_7 u_7 \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

Енді серпімді деформацияның функционалды потенциалдық энергиясының өрнектерін температуралық өрістің болуын ескере отырып, оны келесі формада жаза аламыз

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad (3.72)$$

Бұл жерде $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ түйіннің орын ауыстыруы белгісіз. Бірақ стерженнің екі ұшы да қатты қысылғандықтан, содан $u_1 = 0$ және $u_7 = 0$. Сонда белгісіздер u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 . Шамалар u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 дұрыс болу үшін олар энергияның сақталу заңдарын қанағаттандыруы керек. Температуралық өрістің болуын ескере отырып u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 , серпімді деформациялардың потенциалдық энергетикалық функционалдығын минимизациялау арқылы табиғи шекаралық шарттарды ескере отырып, сызықтық алгебралық теңдеулердің келесі жүйесін аламыз:

$$\left. \begin{aligned}
1) \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{2l} \left(\frac{32}{3} u_2 - \frac{16}{3} u_3 \right) - \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_1 - \frac{2}{3} T_3 \right) = 0; \\
2) \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{2l} \left(\frac{28}{3} u_3 - \frac{16}{3} u_2 - \frac{16}{3} u_4 + \frac{2}{3} u_5 \right) - \\
&- \alpha EF \left(-\frac{1}{6} T_1 + \frac{2}{3} T_2 + \frac{1}{2} T_3 - \frac{1}{2} T_3 - \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{6} T_5 \right) = 0; \\
3) \frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (32u_4 - 16u_3 - 16u_5) - \\
&- \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_3 - \frac{2}{3} T_5 \right) = 0; \\
4) \frac{\partial \Pi}{\partial u_5} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (28u_5 + 2u_3 - 16u_4 - 16u_6 + 2u_7) - \\
&- \alpha EF \left(-\frac{1}{6} T_3 + \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{2} T_5 - \frac{1}{2} T_5 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} T_6 + \frac{1}{6} T_7 \right) = 0; \\
5) \frac{\partial \Pi}{\partial u_6} = 0; &\Rightarrow \frac{EF}{6l} (32u_6 - 16u_5 - 16u_7) - \\
&- \alpha EF \left(\frac{2}{3} T_5 - \frac{2}{3} T_7 \right) = 0
\end{aligned} \right\} \tag{3.73}$$

Сәл қысқартулардан кейін келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left. \begin{aligned}
2u_2 - u_3 &= \frac{\alpha l}{4} (T_1 - T_3); \\
-8u_2 + 14u_3 - 8u_4 + u_5 &= -\frac{1}{6} T_1 + \frac{2}{3} T_2 - \frac{2}{3} T_4 + \frac{1}{6} T_5 \\
-u_3 + 2u_4 - u_5 &= \frac{\alpha l}{4} (T_3 - T_5) \\
u_3 - 8u_4 + 14u_5 - 8u_6 + u_7 &= 3\alpha l \left(-\frac{T_3}{6} + \frac{2T_4}{3} - \frac{2T_6}{3} + \frac{1}{6} T_7 \right) \\
-u_5 + 2u_6 - u_7 &= \frac{\alpha l}{4} (T_5 - T_7)
\end{aligned} \right\} \tag{3.74}$$

Осы жүйені шешу арқылы u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 түйіннің орын ауыстыру мәндері анықталады. Олардан орын ауыстыру заңы анықталады. Атап айтқанда, стерженнің алғашқы $1/3$ бөлігі үшін орын ауыстыру өрісін келесі түрде аламыз [100-104].

$$u^{(1)}(x) = \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_2 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_3, \quad 0 \leq x \leq l \tag{3.75}$$

Сол сияқты, орын ауыстыру өрісі стерженнің екінші 1/3 ұзындығында анықталады, ол келесі түрге ие

$$u^{(2)}(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_3 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_4 + \left(\frac{2x^2 - lx}{l^2} \right) u_5, 0 \leq x \leq l \quad (3.76)$$

Соңында, орын ауыстыру өрісі зерттелген стерженнің соңғы 1/3 ұзындығында анықталады. Бұл келесідей түрде

$$u^{(3)}(x) = \left(\frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} \right) u_5 + \left(\frac{4lx - 4x^2}{l^2} \right) u_6, 0 \leq x \leq l. \quad (3.77)$$

Нақты мәселені шешу үшін келесі бастапқы деректерді аламыз:

$$L = 30 \text{ см}; \quad l = 10 \text{ см}; \quad h = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{C}}; \quad T_{\text{CO}} = 25^\circ \text{C}; \quad K_{\text{xx}} = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{C}}; \quad q = -600 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2};$$

$$\alpha = 0,0000125 \frac{1}{\text{C}}; \quad E = 2000000 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

Бұл мәліметтер Python бағдарламалау тілінде жасалған тиісті мәтіндік өріс арқылы енгізіледі. Бұл мәселені шешу үшін зерттелген стерженді бірдей ұзындықтағы $l = \frac{L}{3} = 10 \text{ см}$ үш дискретті элементке бөліп шығарамыз. Сонда

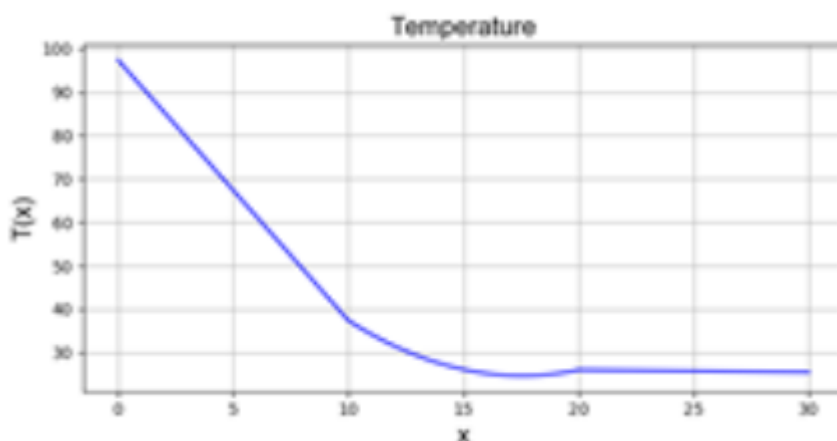
зерттелген стержендағы түйіндердің жалпы саны $r_{\text{уз}} = 2n + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ болады.

Бұл жағдайда түйін температурасының мәндері келесі мәндерге ие болады

$$T_1 = T(x=0) = 97,36^\circ \text{C}; \quad T_2 = T(x=5) = 67,36^\circ \text{C}; \quad T_3 = T(x=10) = 37,36^\circ \text{C};$$

$$T_4 = T(x=15) = 26,11^\circ \text{C}; \quad T_5 = T(x=20) = 26,02^\circ \text{C}; \quad T_6 = T(x=25) = 25,76^\circ \text{C};$$

$$T_7 = T(x=30) = 25,5^\circ \text{C}. \quad \text{Бұл жағдайда зерттелген стержень бойындағы температураның таралу заңы сурет 3.3-те көрсетілген}$$



Сурет 3.3 – Температураның стержень бойымен таралуы

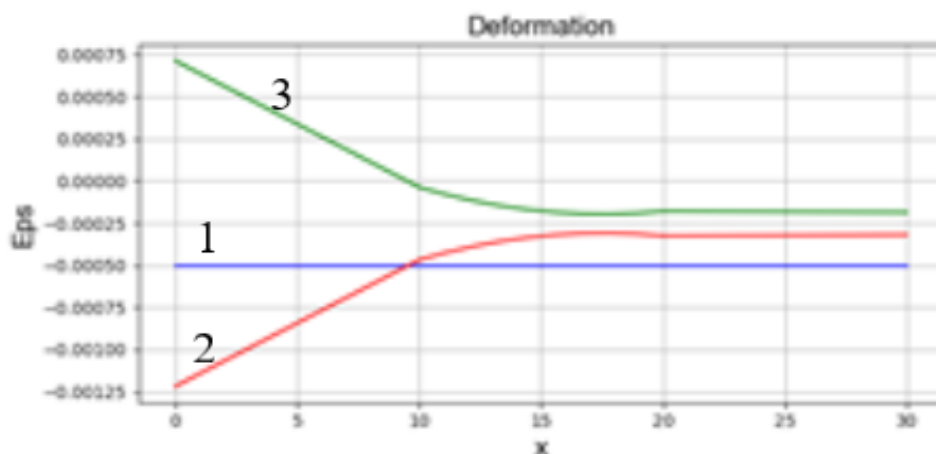
Графиктен стерженнің сол жағындағы температура мәні ең жоғары, ал оң жағында, керісінше, ең аз болатынын көруге болады. Бұл өзектің сол жақ

ұшының көлденең қимасының ауданында жылу ағынының қарқындылығының $q = -600 \left[\frac{Bm}{cm^2} \right]$ болуымен байланысты. Сондай-ақ, бүйір бетінің ортаңғы аймағында және стерженнің оң жақ ұшының көлденең қимасында конвективті жылу берудің болуы. Бұл жағдайда жылу беру коэффициентінің мәні $h = 10 \left[\frac{Bm}{cm^2 \cdot C} \right]$, және қоршаған ортаның температурасы $T_{co} = 25 [^{\circ}C]$.

Егер стерженнің сол жақ шеті қатты қысылып, ал оң жағы бос болса, онда қабылданған бастапқы мәліметтермен зерттелген стерженнің жылулық созылуының мәні $\Delta L_T = 0,01514cm$ болады.

Егер зерттелген стерженнің екі ұшы да қатты қысылған болса, осьтік жылулық қысу күші $R[kГ]$ пайда болады. Біздің жағдайда оның мәні $R = -3170,51[kГ]$ тең болады. Бұл жағдайда қисық $T(x)$, T мен Ox арасындағы аймақ тең болады

$$S = \int_0^L T(x) dx = 3633,144 [cm \cdot ^{\circ}C]$$



Сурет 3.4 – Стержень бойындағы деформацияның өзгеруі

Пайда болған термиялық осьтік қысу күшінің әсерінен термо-кернеулік-деформация күйі пайда болады. Деформацияның термосерпімділік компонентінің түйіндік мәні ε [өлшемсіз] келесідей болады

$$\varepsilon(x=0) = \varepsilon(x=5) = \varepsilon(x=10) = \varepsilon(x=15) = \varepsilon(x=20) = \varepsilon(x=25) = \varepsilon(x=30) = 0,0005$$

Демек, деформацияның термосерпімділік компоненті зерттелген стерженнің бүкіл ұзындығы бойынша тұрақты болатынын көруге болады. Деформацияның термосерпімділік компонентінің таралу заңы сурет 3.4-те көрсетілген. Мұнда түзу сызық «1» деп белгіленеді. Температура компонентінің түйінді мәндері $\varepsilon_T(x)$ [өлшемсіз] келесідей болады:

- 1) $\varepsilon_T(x=0) = -0,00121$;
- 2) $\varepsilon_T(x=5) = -0,000842$;
- 3) $\varepsilon_T(x=10) = -0,000467$;

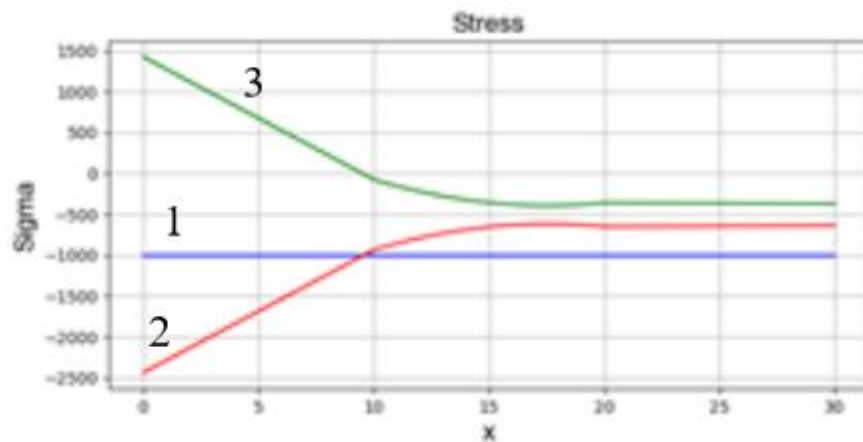
- 4) $\varepsilon_T(x=15) = -0,000326$;
- 5) $\varepsilon_T(x=20) = -0,000325$;
- 6) $\varepsilon_T(x=25) = -0,000322$;
- 7) $\varepsilon_T(x=30) = -0,000319$

Деформацияның температуралық компонентінің зерттелген стержень бойымен таралу заңы сурет 3.4-те көрсетілген. Ол «2» санымен белгіленген.

Деформацияның серпімді компонентінің түйіндік мәні $\varepsilon_x(x)$ [өлшемсіз] келесідей болады:

- 1) $\varepsilon_x(x=0) = 0,0000712$;
- 2) $\varepsilon_x(x=5) = 0,0000337$;
- 3) $\varepsilon_x(x=10) = -0,0000375$;
- 4) $\varepsilon_x(x=15) = -0,0000178$;
- 5) $\varepsilon_x(x=20) = -0,0000179$;
- 6) $\varepsilon_x(x=25) = -0,0000182$;
- 7) $\varepsilon_x(x=30) = -0,0000185$

Деформацияның серпімді компонентінің таралу заңы сурет 3.4-те көрсетілген. Онда ол «3» санымен белгіленген. Бұл суреттен көрініп тұрғандай $\varepsilon_x(x)$ аймақта ($0 \leq x \leq 9$) созылып, әрі қарай қысылатынын көруге болады.



Сурет 3.5 – Стержень бойындағы кернеудің өзгеруі

Кернеудің термосерпімділік компонентінің түйіндік мәндері $\sigma(x)$ $\left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$

келесідей болады

$$\sigma(x=0) = \sigma(x=5) = \sigma(x=10) = \sigma(x=15) = \sigma(x=20) = \sigma(x=25) = \sigma(x=30) = -1009,2$$

Кернеулердің термосерпімділік компонентінің зерттелетін стержен ұзындығы бойынша таралу заңы сурет 3.5-те көрсетілген. Онда ол «1» деп белгіленді. Бұл графиктан көрініп тұрғандай, σ тұрақты болатынын және оның қысу сипатына ие екендігін көрсетеді.

Кернеудің температуралық компонентінің түйіндік мәні $\sigma_T(x) \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ келесідей

болады:

- 1) $\sigma_T(x=0) = -2434,136;$
- 2) $\sigma_T(x=5) = -1684,136;$
- 3) $\sigma_T(x=10) = -934,136;$
- 4) $\sigma_T(x=15) = -652,886;$
- 5) $\sigma_T(x=20) = -650,5;$
- 6) $\sigma_T(x=25) = -644,12;$
- 7) $\sigma_T(x=30) = -637,74$

Кернеулердің температуралық компонентінің зерттелетін стержень ұзындығы бойынша таралу заңы сурет 3.5-те көрсетілген. Онда ол «2» санымен белгіленген.

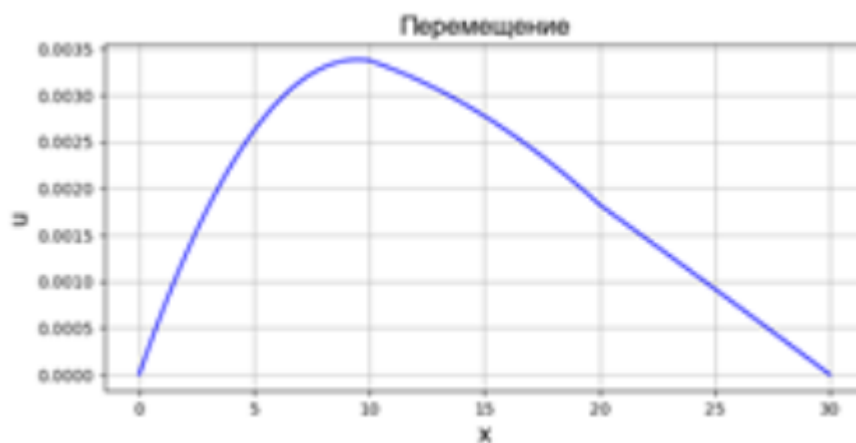
Осы графиктен зерттелетін стерженнің бүкіл ұзындығы бойынша кернеудің температуралық компонентінің табиғаты сығылатын болатыны көрініп тұр. Сонымен қатар, температура жоғарырақ болған кезде $\sigma_T(x)$ мәндер жоғары болады. Серпімді кернеу компонентінің түйіндік мәні келесідей болады:

- 1) $\sigma_x(x=0) = 1424,92;$
- 2) $\sigma_x(x=5) = 674,93;$
- 3) $\sigma_x(x=10) = -75,07;$
- 4) $\sigma_x(x=15) = -356,32;$
- 5) $\sigma_x(x=20) = -358,71;$
- 6) $\sigma_x(x=25) = -365,08;$
- 7) $\sigma_x(x=30) = -371,45;$

Кернеудің серпімді компонентінің таралу заңы $\sigma_x(x) \left[\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \right]$ сурет 3.5-те

көрсетілген. Ол «3» санымен белгіленген. Бұл суреттен стержень қимасында $\sigma_x(x)$ оның $(0 \leq x \leq 9)$ созылғыш, содан кейін қысу сипатына ие екенін көруге болады. Бұл зерттелген стерженнің бастапқы бөлімінде температураның мәні жоғары болуына байланысты. Орын ауыстырудың түйіндік мәндері $u(x) [\text{см}]$ келесідей болады

- 1) $u(x=0) = 0;$
- 2) $u(x=5) = 0,00262;$
- 3) $u(x=10) = 0,00337;$
- 4) $u(x=15) = 0,00277;$
- 5) $u(x=20) = 0,00182;$
- 6) $u(x=25) = 0,00092;$
- 7) $u(x=30) = 0$



Сурет 3.5 – Стерженнің орын ауыстыруы

Стерженнің орын ауыстыруының таралу заңы сурет 3.5-те көрсетілген. Бұл графиктен стерженнің екі шеті мықтап бекітілген қималар қозғалмайтынын көруге болады. Барлық қалған бөлімдер ОХ осі бағытында солдан оңға қарай жылжиды.

Себебі температура сол жақта жоғары болады. Енді зерттелетін стерженнің сол жақ ұшының көлденең қимасының ауданына қолданылатын жылу ағынының $q \left[\frac{Вт}{см^2} \right]$ мәнін 10% арттырайық. Келесі кестеде q әртүрлі мәндер үшін ізделген функциялардың мәндері көрсетілген.

кесте 3.1

q	$u(x=0)$	$u(x=5)$	$u(x=10)$	$u(x=15)$	$u(x=20)$	$u(x=25)$	$u(x=30)$
-600	0	0,00262	0,00337	0,00277	0,00182	0,00092	0
-660	0	0,00288	0,00371	0,00305	0,002	0,001	0
-720	0	0,00315	0,00404	0,00333	0,00219	0,0011	0
-780	0	0,00341	0,00438	0,00361	0,00237	0,00119	0
-840	0	0,00367	0,00472	0,00388	0,00255	0,00128	0

кесте 3.2

q	Термиялық созылу ΔL_T	Жылу күші R	Аудан $T(x)$, ОХ
-600	0,01514	-3170,516	3633,144
-660	0,01571	-3291,218	3771,459
-720	0,01624	-3411,921	3909,773
-780	0,01687	-3532,623	4048,088
-840	0,01744	-3653,325	4186,402

кесте 3.3

q	ε	σ
-600	-0,0005	-1009,2

-660	-0,000523	-1047,627
-720	-0,000543	-1086,048
-780	-0,000562	-1124,4689
-840	-0,000581	-1162,889

кесте 3.4

q	$\varepsilon_T(x=0)$	$\varepsilon_T(x=5)$	$\varepsilon_T(x=10)$	$\varepsilon_T(x=15)$	$\varepsilon_T(x=20)$	$\varepsilon_T(x=25)$	$\varepsilon_T(x=30)$
-600	-0,00121	-0,000842	-0,000467	-0,000326	-0,000325	-0,000322	-0,000319
-660	-0,0013	-0,000895	-0,000482	-0,000327	-0,000326	-0,000323	-0,000319
-720	-0,00139	-0,000947	-0,000498	-0,000329	-0,000328	-0,000324	-0,00032
-780	-0,00148	-0,001	-0,000513	-0,00033	-0,000329	-0,000325	-0,00032
-840	-0,00158	-0,00105	-0,000529	-0,000332	-0,00033	-0,000326	-0,000321

кесте 3.5

q	$\varepsilon_x(x=0)$	$\varepsilon_x(x=5)$	$\varepsilon_x(x=10)$	$\varepsilon_x(x=15)$	$\varepsilon_x(x=20)$	$\varepsilon_x(x=25)$	$\varepsilon_x(x=30)$
-600	0,0000712	0,0000337	-0,0000037	-0,0000178	-0,0000179	-0,0000182	-0,0000185
-660	0,0000783	0,0000371	-0,00000413	-0,0000196	-0,0000197	-0,00002	-0,0000204
-720	0,0000855	0,0000405	-0,0000045	-0,0000213	-0,0000215	-0,0000219	-0,0000223
-780	0,0000926	0,0000438	-0,00000488	-0,0000231	-0,0000233	-0,0000237	-0,0000241
-840	0,0000997	0,0000472	-0,00000525	-0,0000249	-0,0000251	-0,0000255	-0,000026

кесте 3.6

q	$\sigma_T(x=0)$	$\sigma_T(x=5)$	$\sigma_T(x=10)$	$\sigma_T(x=15)$	$\sigma_T(x=20)$	$\sigma_T(x=25)$	$\sigma_T(x=30)$
-600	-2434,136	-1684,136	-934,136	-652,886	-650,495	-644,121	-637,747
-660	-2615,05	-1790,05	-965,05	-655,67	-653,045	-646,034	-639,022
-720	-2795,96	-1895,96	-995,96	-658,46	-655,59	-647,94	-640,29
-780	-2976,877	-2001,876	-1026,876	-661,25	-658,14	-649,85	-641,57
-840	-3157,79	-2107,79	-1057,79	-664,04	-660,69	-651,77	-642,847

кесте 3.7

q	$\sigma_x(x=0)$	$\sigma_x(x=5)$	$\sigma_x(x=10)$	$\sigma_x(x=15)$	$\sigma_x(x=20)$	$\sigma_x(x=25)$	$\sigma_x(x=30)$
-600	1424,93	674,93	-75,07	-356,32	-358,71	-365,08	-371,45
-660	1567,42	742,42	-82,58	-391,95	-394,58	-401,59	-408,6
-720	1709,91	809,91	-90,08	-427,58	-430,45	-438,1	-445,75
-780	1852,4	877,4	-97,59	-463,21	-466,32	-474,61	-482,89
-840	1994,9	944,4	-105,1	-498,85	-502,19	-511,12	-520,04

Кесте 3.2 талдай отырып, берілген жылу ағыны $q = -600 \left[\frac{Bm}{cm^2} \right]$ мәнінің 10% -ға артуы пайда болатын R күштің мәнін $120,7 [кГ]$ арттыруға әкелетінін анықтаймыз. Кесте 3.3 талдау, түсірілетін жылу ағыны $q = -600 \left[\frac{Bm}{cm^2} \right]$ мәнінің

10% -ға артуы кернеудің термосерпімділік компоненті $\sigma_x(x) \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ мәнінің 38,4-ке $\left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ өсуіне әкелетінін анықтауға мүмкіндік береді. Кесте 3.6 талдау кезінде көрсетілген жылу ағынының $q = -600 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]$ 10% -ға жоғарылауы сығылу температуралық кернеу $\sigma_T(x)$ $x=0$ нүктесінде мәнінің $\approx 181 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ өсуіне әкелетіні анықталды. $x=5$ нүктеде $\sigma_T(x=5)$ кернеу $\approx 106 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ ұлғаяды. Сол мезетте $x=10$ нүктесінде $\sigma_T(x=10)$ кернеу $\approx 31 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ бар жоғы ұлғаяды. $x=15$ нүктесінде $q = -600 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]$ ұлғайтуымен $\sigma_T(x=15)$ бар жоғы $\approx 2,78 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ осы шамаға өседі. $\sigma_T(x)$ ұлғаяу стерженнің оң жағына қарай аз болады. Кесте 3.7-де кернеудің серпімді компонентінің мәндеріне q өзгерістің әсері көрсетілген. Мысалы, 10% -ға $q = -600 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} \right]$ арттыру $\sigma_x(x=0)$ мәнді келесі $\approx 142,4 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ арттырады; Сол кезде $\sigma_x(x=5)$ мәндер $\approx 67,4 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ артады. $\sigma_x(x=10)$ кезінде $\approx 7,5 \left[\frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2} \right]$ ұлғаяды. Зерттелетін стерженнің оң жақ шетіне жақындаған сайын $\sigma_x(x)$ мән азаяды. Жүргізілген есептеулер көрсеткендей, q жылу ағыны 10% өсу стерженнің бекітілген учаскелеріндегі деформациялар, кернеулер мен орын ауыстырулардың құрамдас бөліктерінің мәндерінің өсуіне әкеледі.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста мынадай фундаментал нәтижелер алынды.

1. Стерженнің бір дискрет элемент ұзындығы бойынша, жергілікті координата жүйесінде екінші дәрежелі сплайн функциялар құрылды. Олардың қасиеттері анықталды.
2. Бүйір беті изоляцияланған стерженнің сол шетіндегі көлденең қима ауданына $q \left[\frac{W}{cm^2} \right]$ - жылу ағыны түсіп тұрғанда, оң шетіндегі көлденең қима ауданы арқылы сол ауданды орап тұрған сыртқы ортамен жылу алмасқан жағдайда сол стерженнің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционалы құрылып және оның интегралданған көрінісі табылды.
3. Энергияның сақталу заңын пайдаланып сол стерженнің ұзындығы бойынша жылу таралу заңы анықталды.
4. Стерженнің бір шеті бекітіліп екінші шеті бос болған жағдайда оны жылу көздері әсерінен ұзару мөлшері табылады.
5. Стерженнің екі шеті мықтап бекітілген жағдайда, пайда болатын өстік сығушы күш мөлшері анықталды. Сондай-ақ стержень ұзындығы бойынша термо-серпімділік, температуралық және серпімділік деформацияларымен кернеулердің, және орын ауыстырудың таралу заңдары анықталды.
6. Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал құрылып, оның интегралданған көрінісі анықталды.
7. Локалдық жылу ағыны, жылу алмасу және жылу изоляциясы әсеріндегі стерженнің термо-механикалық күйін зерттеу алгоритмдері толықтай жасалды.
8. Радиусы сызықты, көлденең қима ауданы сызықсыз өзгеруші бүйір беті изоляцияланған стерженге сол жақтан жылу ағыны әсер етіп оң жақтан жылу алмасқан жағдайда оның толық жылу энергиясын өрнектейтін функционал құрылды және оның интегралданған көрінісі анықталды.
9. Осы стерженде жылу таралу заңы, ұзару мөлшері, пайда болатын өстік сығушы күш мөлшері, термо-серпімділік, температуралық және серпімділік деформацияларының таралу заңдылықтары анықталды.

10. Осы стержен үшін пайда болған температуралық өрісті есепке ала отыра серпімділік деформациясының потенциал энергиясын өрнектейтін функционал құрылып, оның интегралданған көрінісі анықталды. Соның көмегімен сол стерженнің ұзындығы бойынша орын ауыстыру заңдылығы табылды.

11. Жасалған әдістер мен алгоритмдер IBM PS жүйесінде Python бағдарламасы түрінде жүзеге асырылады. Ол үшін арнайы интерфейс жасалған.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Pantusoa D., Klaus-Juergen Bathe, Bouzinov P.A. A finite element procedure for the analysis of thermo-mechanical solids in contact // Computers and Structures 75. - 2000. – P. 551-573.
- 2 Biswajit B.A Material Point Method Formulation for Plasticity // Computational Physics. - 2006. – P. 1-25.
- 3 Deang, J; Du, Q; Gunzburger, MD Modeling and computation of random thermal fluctuations and material defects in the Ginzburg-Landau model for superconductivity// Computational Physics – 2002.-P. 45-67 .
- 4 Kenzhegul B.Z., Kudaykulov A.K. Myrzasheva A.N. Numerical study of stem elongation of heat-resistant alloy based on the availability of all types of sources // Science and new technologies. - Bishkek, 2009. – P.67-75.
- 5 Greenberg M.D., Pryor J., Elban W. On the Formulation of the Zero Creep Method for Small Diameter Wires // Materials Science and Engineering. - 1978. - P. 63-67.
- 6 Gurtin M.E. An Introduction to Continuum Mechanics // New York: Academic Press - 1981. – P.830.
- 7 Maugin, G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermo-mechanics // Mechanics Research Communications - 2015. - P.79.
- 8 Duan, Q.,Li, X.,Zhang, H.,Belytschko, T.Quadratically consistent integration schemes for the element-free Galerkin method // WIT Transactions on Modelling and Simulation – 2015.- P.73.
- 9 Wright T.W. The Physics and Mathematics of Adiabatic Shear Bands // Cambridge: Cambridge University Press, UK, - 2002. – P.240.
- 10 Pydah, Anup; Batra, R. C.Shear deformation theory using logarithmic function for thick circular beams and analytical solution for bi-directional functionally graded circular beams.// COMPOSITE STRUCTURES - 2017. –P. 45-60.
- 11 Tashenova Zh.M, Nurlybaev, E.N., Kudaiykulov A.K. Method of Solution and Computational Algorithm for Mixed Thermo-Mechanics Problem // World Applied Sciences: Special Issue on Techniques and Technologies. - 2013. –P. 49-57.
- 12 Huebner K.H. The Finite Element Method for Engineers // Wiley. - 1975. – P. 183-187.
- 13 Lishirong Yangjingning. Accurate model of post buckling of elastic rod with Mirabel cross sections // Gansu University of Science. - 1999. – P. 98-102.
- 14 Tashenova Zh., Nurlybaeva E., Kudaykulov A. Method Preparation and Solution Algorithm for Resolving Stationary Problem of a Rod under Thermo - Stressed Condition Restrained at both Ends Affected by Heat Exchange and Heat Flows // World Applied Sciences Special Issue on Techniques and Technologies. - 2013. - P. 49-57.

15 Li, Li; Jie, Wu; Wu Yuanzhi . Effect of Static Annealing on Microstructure and Texture in Extruded Mg-Gd-Y-Zr Alloy // RARE METAL MATERIALS AND ENGINEERING.-2016.- P. 2263-2268 .

16 Delaey L., Krishnam R.V., Tas H., Warlimont H. Thermoelasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations // Journal of Materials Science. - 1974. - № 9. - P. 1359 -1363.

17 Marin I., Wiseman H. Plastic stress-strain relation for aluminum alloy 14S-T4 subjected to combined tension and torsion // Journal of Metals. – 1953. - Vol. 5, № 9. – P. 215-223.

18 Naghdi P.M., Rowley J.C. An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity // Journal of the Mechanics and Physics. – 1954. – Vol. 3. – P. 856-864.

19 Wasilewski R.J. The effect of applied stress on the martensitic transformations in TiNi // Met. Trans. – 1975. - Vol. 2, № 11. - P. 2973- 2981.

20 Copetti M.I.M. A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint//Math and Comput. Simul. – 2002. –Vol. 59, №4. –P.361-376.

21 Бородачев Н.М., Савченко Н.И. Вариационный принцип для температурной задачи теории упругости в напряжениях//Проблемы прочностей. – 2002. –№2. –С.141-145; 151.

22 Павлов С.П., Перегудов А.Б. Оптимальное армирование составных стержней в задаче кручения при действии температурного поля//Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. – 2002. – С. 76-83.

23 Бачурихина Т.В. Исследование поведения пространственной конструкции из криволинейных композитных стержней под воздействием нагрузок и температур//Математическое моделирование в естественных науках. – 2002. – С. 55-56.

24 Решетько С. М.Задача сопряженного теплообмена плоских и осесимметричных тел в сверхзвуковом потоке совершенного газа: автореферат канд. физ.-мат. наук. - М.: Московский авиационный институт, 2008. -19 с.

25 YuBo.,WangYi., ZhangJinjun., LiuXin., ZhangZhengwei., WangKai. Тепловое воздействие трубопровода с нефтепродуктами на трубопровод сырой нефти при их расположении в одной траншее. Влияние длины участка трубопроводов. Thermal impact of the products pipeline on the crude oil pipeline laid in one ditch — The effect of pipeline interval // Int. J.Heal and Mass Transfer.-2008. - № 3-4(51). - С.597-609.

26 Nouri-BorujerdiA., LavasaniA. М. Экспериментальное исследование теплопереноса от эксцентричной трубы в поперечных потоках при вынужденной конвекции. Experimental study of forced convection heat transfer from a cam shaped tube in cross flows // Int. J. Heat and Mass Transfer. -2007. - №13-14(50). - С.2605-2611.

27 Зубков В. Г. Расчет теплообмена в элементах системы охлаждения при отсутствии гидродинамической стабилизации потока// VI Минский

международный форум по тепло - и массообмену: Тезисы докладов и сообщений. - Минск: Институт тепло - и массообмена НАНБ, 2008. - Т.1.- С. 96.

28 Duluc Marie-Christine, XinShihe, Lusseyran Francois. LeQuerePatrick Численное и экспериментальное исследование свободной конвекции вокруг тонкой проволоки: большое время оценки численного приближения. Numerical and experimental investigation of laminar free convection around a thin wire: Long time scalings and assessment of numerical approach // Int. J. Heat and Fluid Flow.-2008. - №4(29). - С. 1125-1138.

29 Baturkin V. M. Применение методов конечных элементов и конечных разностей для термического моделирования тепловых труб в системах терморегулирования.

Application of finite elements/finite difference methods for thermal simulation of heat pipes in thermal control systems // VI Минский международный форум по тепло - и массообмену: Тезисы докладов и сообщений. - Минск: Институт тепло- и массообмена НАНБ, 2008. - Т.2.- С. 14-16.

30 Кенжегулов Б.З. Численное моделирование распределения поля температуры и удлинения трубы ограниченной длины при наличии теплообмена и теплового потока // Динамика неоднородных систем: Труды ИСА РАН. – М., 2008. – Т. 32(3). - С.181-186.

31 Кенжегулов Б.З. Численное исследование термонапряженно - деформированного состояния заземленного двумя концами стержня при наличии частичной теплоизоляции, теплового потока и теплообменов.// Динамика неоднородных систем: Труды ИСА РАН. – М., 2008. – Т. 32(3). - С.170-180.

32 Дьяконов Е.Г. Проекционно-разностные и разностные методы решения нелинейных стационарных задач теории упругости и пластичности// Численные методы механики сплошной среды.: сб. науч. тр. - т.7, 1976. - №5. - С.14-78.

33 Дьяконов Е.Г. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов// Вестник Московского ун-ва, сер. «Вычислительная математика и кибернетика». – 1977. - № 2. – С.3-19.

34 Касумов А.К. О матрице жесткости стержневых конструкций при температурном воздействии// Изв. АН Азербайджана, серия физ.-техн. и мат. наук. – 1997. - №4,5. – С.208-215.

35 Литвинов А.Н. Расчет термомеханических напряжений в многослойных упругих элементах// Датчики систем измерения, контроля и управления. Серия системы управления. -2001. - №21. – С.20-27.

36 Canarozzi Agostino Antonio, Ubertini Francesco. A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis// Int. J. Solids and Struct. -2001. - т.38, №4. – С.717-739.

37 Canarozzi Agostino Antonio, Momanyi Francis Xavier, Ubertini Francesco. A hybrid flux axisymmetric model for thermal analysis// Comput. and Struct. – 1979. - № 12. – С.1187-1201.

- 38 FujiiMotoo, Zhang Xing. Noncontact measurement of interal temperature distribution in a solid material using ultrasonic computed tomography// *Exp. Therm. And Fluid Sci.* – 2001. - т.24, №3.4. - С.107-116.
- 39 Попов Г.Я. Явное решение смешанной задачи стационарной несвязной термоупругости для усеченного кругового полого конуса// *Доклад РАН.* – 2001. – т.380, № 3. - С.349-354.
- 40 Dour G. Thermal stress and distortion in dies of die casting processes: a new normalized approach// *Modell. And Simul. Mater. SciandEng.* – 2001. - т.9, №5. – С.399-413.
- 41 Филиппова О.В., Ремизова О.И., Михайлова Н.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра конечной длины// *Физические основы экспериментального и математического моделирования процессов газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках.* 2001.- 183-186с.
- 42 Mazocchi Alfredo, Munoz Rivera Jaime E., GraziaNaso Maria Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity// *Math.Meth.Appl.Sci.* – 2002. - т.25, №11. - С.955-980.
- 43 RackeReinhardThermoelasticity with second sound-exponential stability in linear and nonlinear 1-d// *Math.Meth.Appl.Sci.* – 2002. - т.25, №5. - С.409-441.
- 44 Opper C.D., Pilkey W.D. Termoelasticity solutions for straightbeams// *Trans.ASME.J.Appl.Mech.* – 2002. т.69, №3. - С.224-229.
- 45 Xuan F.Z., Tu S.D., Wang Z.D., Ma C.W. Evulation of the time dependent failure assessment curves for 10CrMo910 and 316 SS at $550^{\circ}C$ // *Actamet.sin.* – 2004. - т.17, №4. - С.443-449.
- 46 Dennis Brian H., Dulicravich George S., YishimuraShinobu. A finite element formulation for the determination of unknown boundary conditions for three-dimensional steady thermoelastic problems// *Trans. ASME. J. HeatTransfer.* – 2004. т.126, №1. - С.110-118.
- 47 Larry J. Segerlind. *Applied Finite Element Analysis*, 2nd Edition.448 pages, February 1985, ©1984
- 48 Тихонов А.Н., Самарский А.А *Уравнение математической физики.* М.:Наука, 1977,672с.
- 49 P. V. Tsoi, S. Yu. Yusunov, N. R. Korpeev. Direct and inverse heat-conduction problems for a semiinfinite rod for a partial outflow of heat through the surface, *Journal of engineering physics*, July 1984, Volume 47, Issue 1, pp 860-864
- 50 Құдайқұлов А.Қ., Найзағараева А.А., Мусайф М., Ноғайбаева М.О. Көлденең қима ауданы сызықты өзгеретін шекті ұзындықтағы екі шеті бекітілген стерженде жылу ағыны әсерінен пайда болатын кернеу мен сығушы күшті табудың вариациялық сандық әдісі.// *Қазақстан Республикасының Ұлттық Ғылым Академиясының ХАБАРШЫСЫ - Алматы, мамыр 2015, №3-2015, ISSN 1991-3494 167-172б.*

51 Құдайқұлов А.Қ., Мусайф М., Ноғайбаева М.О. Жылу ағынымен жылу алмасулар әсеріндегі шекті ұзындықтағы стерженнің термофизика – механикалық күйін зерттеу. // Қазақстан Республикасының Ұлттық Ғылым Академиясының ХАБАРЛАРЫ - Алматы мамыр-маусым 2015, №3-2015, ISSN 1991-346X, 168-1756.

52 Құдайқұлов А.К., Ташев А.А. Численное исследование удлинения стержня из жаропрочного и тугоплавкого сплава при наличии температуры, теплоизоляции, теплообмена и осевой силы. // Материалы научной конференции ИИВТ МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий» - Алматы, 2015, 92-96.

53 Zh.M. Tashenova, A.K. Zhumadillaeva, E.N. Nurlybaeva, A.K. Kudaykulov. Numerical study of established thermo-mechanical state of rods of limited length, with the presence of local heat flows, temperatures, heat insulation and heat transfer. Research Papers from the International Conference on Mechanical Engineering, Materials and Energy (ICMEME). Volume 19, Number 8, August 2013, pp. 2395-2397(3).

54 Zh. M. Tashenova, E.N. Nurlybaeva and A.K. Kudaykulov. Method of Solution and Computational Algorithm for Mixed Thermo-Mechanics Problem. World Applied Sciences Journal 22 (Special Issue on Techniques and Technologies): 49-57, 2013 ISSN 1818-4952.

55 Kudaykulov A., Zhumadillaeva A. Energetic Method of Solving Nonlinear Established Tasks of Thermomechanics for the Rod Superalloys. The international conference, mathematical and computational modeling in science and technology, Izmir – Turkey (August 02-07, 2015), 2015, page 151.

56 Kudaykulov A., Zhumadillaeva A. Numerical simulation of temperature distribution field in beam bulk in the simultaneous presence of heat insulation, heat flux and heat exchange. 2nd INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL SCIENCE AND ENGINEERING (ICCESEN-2015). 14-19 October 2015, ANTALYA-TURKEY

57 Құдайқұлов А., Ташев А.А. Вариационный подход для исследования теплопроводности стержня при квадратичной аппроксимации, Теоретико-прикладные аспекты социально-экономического и политического развития стран Центральной Азии и СНГ: сб. мат-лов заочной междунар. научн.-практ. конф. в 2-х т. / под ред.: М.С. Бесбаева, С.А. Жакишевой. - Алматы: Центр оперативной печати КазАТиСО, 2015, с.208-213

58 Құдайқұлов А.К., Ташев А.А. Численное исследование удлинения стержня из жаропрочного и тугоплавкого сплава при наличии температуры, теплоизоляции, теплообмена и осевой силы. // Материалы научной конференции ИИВТ МОН РК «Современные проблемы информатики и вычислительных технологий» - Алматы, 2015, 92-96.

59 K. K. Vasilevskii Nonstationary heating of a conical rod. Journal of engineering physics, December 1966, Volume 11, Issue 6, pp 389-391

- 60 Isaac Fried. Numerical Solution of Differential Equations. ACADEMIC PRESS, INC. New York, 1979, p.254
- 61 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1960.– 659 с.
- 62 Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.– М.: Мир, 1969.–296 с.
- 63 Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – Киев: Высшая школа, 1973.–672с.
- 64 Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed., Futext Educational Publishers, N.Y., 1973.
- 65 Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений в механике сплошных сред.– М.: Недра, 1974.– 239с.
- 66 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975.– 312с.
- 67 Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. –М.: Наука, 1975.– 575с.
- 68 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.–М.: Мир, 1979.–392с.
- 69 Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики.– М.:Просвещение, 1967.–246 с.
- 70 Аринов Е. Устойчивость колебаний диссипативных тел: монография.– Жезказган: АО «ЖезУ», 2014.– 132с.
- 71 Математическое (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструкционных элементах: учебное пособие/под. редакцией д.ф.-м.н., профессора Кудайкулова А.К. и др., Туркестан,2009.–168 с.
- 72 Такишов А.А. ,Кудайкулов А.К., Аринов Е., Жумадилаева А.К.Численное исследование установившегося напряженно-деформационного состояния частично теплоизолированного двумя концами стержня при заданной точечной температуре// Сборник материалов международных XII Байконуровских чтений «Академик О.А. Байконуров и его вклад в развитие горного дела, науки и образования Казахстана».– Жезказган, 2012.– С.313-320.
- 73 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.– М.: Наука, 1977.– 215с.
- 74 Дьяконов Е.Г. О некоторых модификациях проекционно-разностных методов//Вестник Московского университета, сер. «Вычислительная математика и кибернетика».–1977.– № 2.– С. 3-19.
- 75 Құдайқұлов А.Қ., Аринов Е., Жумадилаева А.К., Балапанова Г.М. Жылу көздері әсерінен құймадан жасалған стержендік материалдарда туындайтын жылу серпимділік күйін анықтау// Сборник материалов международных XII Байконуровских чтений «Академик О.А. Байконуров и его вклад в развитие горного дела, науки и образования Казахстана».– Жезказган, 2012.– С. 320 -325.

76 Кудайкулов А.К., Курманалиев Л.Т., Такишов А.А., Аринов Е. Тұрақталған жылу өткізгіштік және термоядернеулік деформациялық мәселені энергетикалық әдіспен шешу// Сборник материалов международ-ных XIII Байконуровских чтений «О.А. Байконуров и развитие современной горной науки, экономики и образования Казахстана». –Жезказган, 2013.–С.239-248.

77 Аринов Е., Кассилаускайте И.Г. Метод конечных разностей при решении задач теплопроводности//Сборник материалов республиканских VII Маргулановских чтений «Наука, образование и культурно-исторические аспекты и перспективы Улытау-Жезказганского региона». –Жезказган, 2014.–С.177-179.

78 Аринов Е., Кассилаускайте И.Г. Основные соотношения метода конечных элементов для одномерных конструкционных элементов//Сборник материалов международных XIV Байконуровских чтений «Региональные возможности реализации стратегии индустриально-инновационного развития «Казахстан-2050». – Жезказган, 2014. – С.230-233.

79 Такишов А.А., Кудайкулов А.К., Аринов Е., Курбаналиев Л.Т. Вычислительный алгоритм и метод решения нелинейных установившихся задач термоупругости//Сборник материалов международных XIV Байконуровских чтений «Региональные возможности реализации стратегии индустриально-инновационного развития «Казахстан-2050». –Жезказган, 2014. – С.327-330.

80 Такишов А.А., Кудайкулов А.К., Аринов Е., Курбаналиев Л.Т. Определение поля напряжения в стержне переменного сечения при наличии теплового потока и теплообмена//Сборник материалов международных XIV Байконуровских чтений «Региональные возможности реализации стратегии индустриально-инновационного развития «Казахстан-2050». –Жезказган, 2014.– С.330-337.

81 Аринов Е., Кассилаускайте И.Г. Конечно-элементное моделирование распределения температур стержня ограниченной длины при наличии теплового потока на полной поверхности поперечного сечения одного конца// Научный журнал «Вестник Жезказганского университета имени О.А.Байконурова».–2014.–№ 2 (28).– С.172-176.

82 Ташенова Ж.М., Ногайбаева М.О., Такишов А.А., Аринов Е., Кудайкулов А.К. Энергетический метод в решении задач термоупругости // Сборник научных трудов III международной научной конференции «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине».–часть I.–Томск, 2016.–С.216-220.

83 Fung Y.C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965

84 Krieth F., Principles of Heat Transfer, 3-rd ed. Index Educational Publishers, N.Y., 1977

85 Huebner K.H., The Finite Element Method for Engineers, Wiley, N.Y., 1975

86 Harry J. Segerlind Applied Finite Element Analysis, N.Y., 1976

- 87 Visser W., Finite Element Method for Determination of Non-Stationary Temperature Distribution and Thermal Deformations, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology Wrights Patterson Air Force base, Dayton, Ohio, 1965
- 88 Conte S.D., Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, N.Y. 1965
- 89 Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 3-rd ed., Wiley, N.Y., 1972
- 90 Williams P.W., Numerical Computation, Nelson, Don Mill, Can., 1972
- 91 Johnson C., Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, Cambridge, 1987
- 92 Gaspar Jr., Moreira M.L., Desampaio P.A.B. Temperature Distribution Fuel Rods: A study on the Effect of Eccentricity in the Position of UO₂ Pellets., 0-th International Conference «Nuclear Energy for New Europe» 2011
- 93 IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics (Volume: 18, Issue:1, Jan-feb. 2012)
- 94 Timoshenko S, Goodier J.N. Theory of Elastic. N.Y., 1951
- 95 Kudaykulov A., Tashev A., Zhumadillayeva A., Askarova A. Investigation of the Steady Nonlinear-Thermomechanical State of a Rod of Limited Length and Constant Cross-Section in the Presence of Symmetrical Local Thermal Insulation, Lateral Heat Exchanges and End Heat Fluxes // Journal of Advanced Physics. Vol.7, pp.1-5,2018
- 96 Kudaykulov A., Tashev A.A., Askarova A. A computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section// Open Engineering, Vol. 8, pp.170-175, 2018 (CiteScore – 1,2; 46 percentile)
- 97 Жумаханова А.С., Кудайкулов А., Ташев А.А., Калиева Г.С., Асқарова А. Энергетический метод в исследовании установившегося теплофизического состояния стержня переменного сечения при наличии теплового потока, теплообмена и теплоизоляции// Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан. – Алматы, 2017. – №3 (313). – С.38-48.
- 98 Кудайкулов А., Аршидинова М.Т., Асқарова А. Основные соотношения нелинейных квадратичных элементов и термоупругих энергетических принципов и моделирование термомеханических процессов в стержнях ограниченной длины при наличии переменного теплового потока// Монография. – Алматы, 2017. – ISBN 978-601-208-995-4 – С.147.
- 99 Кудайкулов А., Аршидинова М.Т., Асқарова А. Численное моделирование термонапряженного состояния защемленного двумя концами стержня при наличии источников тепла// Монография. – Алматы, 2017. – ISBN 978-607-280-996-1 – С.87.
- 100 Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аршидинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А., Ташев А.А., Асқарова А. Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена//

Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан. – Алматы, 2018. – №1 (317). – С.25-33.

101 Аршидинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А., Асқарова А. Исследование и разработка метода учета наличия локальных поверхностных теплообменов в стержнях переменного сечения// Вестник КазНУ. – Алматы, 2019. – №3 (133). – С.276-283

102 Кудайкулов А., Алдибаева Л.Т., Асқарова А.«Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах Европы и Азии» XXXVII Международной научно-практической интернет-конференции (Переяслав-Хмельницкий, Украина, 29-30 апреля, 2017).

103 Аршидинова М.Т., Бегалиева К.Б., Асқарова А. «Проблемы и перспективы развития современной науки в странах Европы и Азии» III Международной научно-практической интернет-конференции (Переяслав-Хмельницкий, Украина, 30 апреля, 2018).

104 Аршидинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А., Асқарова А. Посвященная 80-летнему юбилею профессора Бияшева Р.Г «Информатика и прикладная математика» III Международной научной конференции (Алматы, 2018).